Banque PT – Épreuve de Mathématiques B

Corrigé complet

Correction rédigée par Excellence Maths

Premier exercice

On note, pour un polynôme P, $P^{(k)}$ sa dérivée k-ième. On travaille dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Partie A

Question 1. Soit

$$P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X].$$

Alors

$$P(0) = a, \qquad P'(0) = b, \qquad P''(0) = 2c, \qquad P^{(3)}(0) = 6d.$$

La condition définissant H est donc

$$6P(0) = P^{(3)}(0) \iff 6a = 6d \iff d = a.$$

Ainsi

$$P \in H \iff P = a(1 + X^3) + bX + cX^2.$$

On obtient donc

$$H = \mathrm{Vect}(1 + X^3,\ X,\ X^2).$$

La famille $(1 + X^3, X, X^2)$ est libre, car une relation

$$\alpha(1 + X^3) + \beta X + \gamma X^2 = 0$$

force, par identification des coefficients, $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Ainsi H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et

$$\boxed{\mathcal{B}_H = (1 + X^3,\ X,\ X^2) \text{ est une base de } H, \qquad \dim H = 3.}$$

Question 2. On définit

$$h : H \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad h(P) = P'(0).$$

Soient $P, Q \in H$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$h(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)'(0) = \lambda P'(0) + \mu Q'(0) = \lambda h(P) + \mu h(Q).$$

Donc h est linéaire.

Plus précisément, h est une forme linéaire sur H :

$$\boxed{h \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R}) = H^*.}$$

Question 3. On admet que f est linéaire. Il reste à vérifier que $f(P) \in H$ pour tout $P \in H$.

Soit $P \in H$. Posons

$$a = P(0), \qquad b = P'(0), \qquad c = P''(0).$$

Alors
$$f(P) = a(X + X^2) - \frac{b}{2}(X^3 + X^2 - X + 1) - \frac{c}{4}(X^3 - X^2 + X + 1).$$
Le coefficient constant de $f(P)$ vaut
$$f(P)(0) = -\frac{b}{2} - \frac{c}{4}.$$
Le coefficient de X^3 dans $f(P)$ vaut également
$$-\frac{b}{2} - \frac{c}{4}.$$
Donc
$$f(P)^{(3)}(0) = 6\left(-\frac{b}{2} - \frac{c}{4}\right) = 6f(P)(0).$$
Ainsi $f(P) \in H$.

Comme f est linéaire et envoie H dans H, on a bien
$$\boxed{f \in \mathcal{L}(H), \text{ c'est-à-dire que } f \text{ est un endomorphisme de } H.}$$

Partie B

Question 4. Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E est une application
$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
qui vérifie, pour tous $x, y, z \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

- φ est bilinéaire ;
- φ est symétrique : $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;
- φ est positive : $\varphi(x, x) \geq 0$;
- φ est définie : $\varphi(x, x) = 0 \iff x = 0$.

Question 5. Supposons que φ soit linéaire par rapport à sa première variable et symétrique. Il faut démontrer que φ est aussi linéaire par rapport à sa seconde variable.

Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Par symétrie puis linéarité en première variable,
$$\begin{aligned}\varphi(P, \lambda Q + \mu R) &= \varphi(\lambda Q + \mu R, P)\\ &= \lambda\varphi(Q, P) + \mu\varphi(R, P)\\ &= \lambda\varphi(P, Q) + \mu\varphi(P, R).\end{aligned}$$
Donc φ est linéaire par rapport à sa seconde variable.

Ainsi,
$$\boxed{\varphi \text{ est bilinéaire.}}$$

Question 6. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que
$$P(0) = P'(0) = P''(0) = P^{(3)}(0) = 0.$$

Première méthode : formule de Taylor pour un polynôme de degré au plus 3. Pour tout X,
$$P(X) = P(0) + P'(0)X + \frac{P''(0)}{2}X^2 + \frac{P^{(3)}(0)}{6}X^3.$$

Tous les coefficients du membre de droite sont nuls, donc $P = 0$.

Deuxième méthode : multiplicité de la racine 0. Les égalités

$$P(0) = P'(0) = P''(0) = P^{(3)}(0) = 0$$

montrent que 0 est racine de P de multiplicité au moins 4. Or P est de degré au plus 3. Le seul polynôme de degré au plus 3 ayant une racine de multiplicité au moins 4 est le polynôme nul. Donc

$$\boxed{P = 0.}$$

On considère désormais

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{3} \frac{P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)}{(k!)^2}.$$

Question 7. Les polynômes X et X^2 appartiennent à H, car

$$6X(0) = 0 = X^{(3)}(0), \qquad 6X^2(0) = 0 = (X^2)^{(3)}(0).$$

De plus,

$$X(0) = 0, \quad X'(0) = 1, \quad X''(0) = 0, \quad X^{(3)}(0) = 0,$$

ce qui donne

$$\varphi(X, X) = 1.$$

De même,

$$X^2(0) = 0, \quad (X^2)'(0) = 0, \quad (X^2)''(0) = 2, \quad (X^2)^{(3)}(0) = 0,$$

ainsi

$$\varphi(X^2, X^2) = \frac{2^2}{(2!)^2} = 1.$$

Enfin,

$$\varphi(X, X^2) = 0.$$

Donc

$$\boxed{X \text{ et } X^2 \text{ sont orthogonaux et unitaires dans } H.}$$

Question 8. D'après la question 1,

$$H = \mathrm{Vect}(1 + X^3,\ X,\ X^2).$$

Calculons les produits scalaires avec $1 + X^3$. On a

$$(1 + X^3)(0) = 1, \quad (1 + X^3)'(0) = 0, \quad (1 + X^3)''(0) = 0, \quad (1 + X^3)^{(3)}(0) = 6.$$

Donc

$$\varphi(1 + X^3, X) = 0, \qquad \varphi(1 + X^3, X^2) = 0,$$

et

$$\varphi(1 + X^3, 1 + X^3) = 1 + \frac{6^2}{(3!)^2} = 1 + 1 = 2.$$

Ainsi

$$\frac{1 + X^3}{\sqrt{2}}$$

est unitaire et orthogonal à X et X^2.

En classant les éléments par ordre décroissant de degré, une base orthonormée de H contenant X et X^2 est

$$\boxed{\mathcal{B} = \left(\frac{1+X^3}{\sqrt{2}},\, X^2,\, X \right).}$$

Question 9.a. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, le projeté orthogonal de 1 sur H est

$$\mathrm{proj}_H(1) = \sum_{e \in \mathcal{B}} \varphi(1, e) e.$$

Or

$$\varphi\left(1, \frac{1+X^3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi(1, X^2) = 0, \qquad \varphi(1, X) = 0.$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{proj}_H(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1+X^3}{\sqrt{2}} = \frac{1+X^3}{2}.}$$

Question 9.b. On a

$$1 - \mathrm{proj}_H(1) = 1 - \frac{1+X^3}{2} = \frac{1-X^3}{2}.$$

Ce polynôme est orthogonal à H et non nul. Comme

$$\dim \mathbb{R}_3[X] = 4, \qquad \dim H = 3,$$

on a

$$\dim H^\perp = 1.$$

Ainsi

$$\boxed{H^\perp = \mathrm{Vect}(1 - X^3).}$$

Une base de l'orthogonal de H dans $\mathbb{R}_3[X]$ est donc

$$\boxed{(1 - X^3).}$$

Partie C

On considère la rotation r d'axe dirigé et orienté par

$$\vec{u} = \vec{j} - \vec{k}$$

et d'angle

$$\theta = -\frac{\pi}{2}.$$

Question 10. On pose

$$\vec{u}' = \frac{\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{2}}.$$

On choisit ensuite

$$\vec{v}' = \vec{i}.$$

Pour obtenir une base orthonormée directe, on prend

$$\vec{w}' = \vec{u}' \wedge \vec{v}' = \frac{\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{2}} \wedge \vec{i} = -\frac{\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathcal{B}' = \left(\frac{\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{2}}, \vec{i}, -\frac{\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}}\right)}$$

est une base orthonormée directe, et $\vec{u}'$ est colinéaire à $\vec{u}$ de même sens.

Dans cette base, la rotation a pour matrice

$$R' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Comme $\theta = -\pi/2$, on obtient

$$\boxed{R' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Question 11. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathcal{B}'$ est orthonormée, $P^{-1} = P^T$. Donc

$$R = PR'P^T.$$

Le calcul donne

$$\boxed{R = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

Question 12. La matrice R représente une rotation d'axe Δ et d'angle $-\pi/2$.

Comme R est orthogonale,

$$R^T = R^{-1}.$$

Donc R^T représente la rotation de même axe Δ et d'angle opposé :

$$\boxed{R^T \text{ représente la rotation d'axe } \Delta \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}.}$$

Ensuite, puisque les puissances d'une rotation gardent le même axe et multiplient l'angle,

$$R^{2025} \text{ représente une rotation d'angle } 2025\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Or $2025 \equiv 1 \pmod 4$, donc

$$2025\left(-\frac{\pi}{2}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

Ainsi

$$\boxed{R^{2025} = R.}$$

Enfin $2026 \equiv 2 \pmod 4$, donc

$$2026\left(-\frac{\pi}{2}\right) \equiv -\pi \equiv \pi \pmod{2\pi}.$$

Ainsi R^{2026} représente la rotation d'axe Δ et d'angle π. Deux descriptions équivalentes sont donc :

$$\boxed{R^{2026} \text{ est le demi-tour d'axe } \Delta,}$$

ou encore

$$\boxed{R^{2026} \text{ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle } \Delta.}$$

Partie D

On reprend la base orthonormée

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3) = \left(\frac{1+X^3}{\sqrt{2}},\, X^2,\, X\right).$$

Question 13. Calculons les images des vecteurs de $\mathcal{B}$.
Pour

$$e_1 = \frac{1+X^3}{\sqrt{2}},$$

on a $e_1(0) = 1/\sqrt{2}$, $e_1'(0) = 0$, $e_1''(0) = 0$, donc

$$f(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + X^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}e_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2.$$

Pour $e_2 = X^2$, on a $e_2(0) = 0$, $e_2'(0) = 0$, $e_2''(0) = 2$, donc

$$\begin{aligned} f(e_2) &= -\frac{1}{2}(X^3 - X^2 + X + 1) \\ &= -\frac{1}{2}(1+X^3) + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3. \end{aligned}$$

Pour $e_3 = X$, on a $e_3(0) = 0$, $e_3'(0) = 1$, $e_3''(0) = 0$, donc

$$\begin{aligned} f(e_3) &= -\frac{1}{2}(X^3 + X^2 - X + 1) \\ &= -\frac{1}{2}(1+X^3) - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

On remarque que cette matrice est exactement la matrice R obtenue dans la partie C.

Question 14. Puisque $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est la matrice R de la partie C, on peut reprendre, dans l'espace euclidien H muni de φ, le même changement de base orthonormé que dans la partie C.

Définissons

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{e_2 - e_3}{\sqrt{2}} = \frac{X^2 - X}{\sqrt{2}}, \\ E_2 &= e_1 = \frac{1 + X^3}{\sqrt{2}}, \\ E_3 &= -\frac{e_2 + e_3}{\sqrt{2}} = -\frac{X^2 + X}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Posons

$$\boxed{\mathcal{B}'' = (E_1, E_2, E_3).}$$

Alors, par construction,

$$f(E_1) = E_1, \qquad f(E_2) = -E_3, \qquad f(E_3) = E_2.$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Enfin, comme $\mathcal{B}$ est orthonormée et comme les coordonnées de $\mathcal{B}''$ dans $\mathcal{B}$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, la base $\mathcal{B}''$ est elle-même orthonormée pour φ. En particulier,

$$\boxed{\mathcal{B}'' \text{ est orthogonale pour le produit scalaire } \varphi.}$$

Deuxième exercice

Dans les trois premières parties, on travaille dans le plan euclidien orienté, identifié à $\mathbb{C}$.

Partie A

Question 1.a. Soient $a, b > 0$. L'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est celle d'une ellipse centrée en O, dont les axes sont les axes de coordonnées. Un paramétrage usuel est

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.}$$

Question 1.b. L'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est celle d'une hyperbole centrée en O, d'axe transverse l'axe des abscisses. Elle possède deux branches.

Un paramétrage usuel de la branche droite est

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cosh t, \\ y = b\sinh t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.}$$

Un paramétrage usuel de la branche gauche est

$$\boxed{\begin{cases} x = -a\cosh t, \\ y = b\sinh t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.}$$

Question 2.a. Soient F un point, D une droite ne contenant pas F et $\varepsilon > 0$. La conique de foyer F, de directrice D et d'excentricité ε est l'ensemble des points M du plan vérifiant

$$\boxed{MF = \varepsilon\, d(M, D),}$$

où $d(M, D)$ désigne la distance du point M à la droite D.

Question 2.b. La nature de la conique dépend de l'excentricité :

$$\boxed{\begin{cases} 0 < \varepsilon < 1 & : \text{ellipse}, \\ \varepsilon = 1 & : \text{parabole}, \\ \varepsilon > 1 & : \text{hyperbole}. \end{cases}}$$

Question 3. La relation

$$z' = \mathrm{e}^{i\theta} z$$

traduit une rotation de centre O et d'angle θ. Ainsi

$$\boxed{M' \text{ est l'image de } M \text{ par la rotation de centre } O \text{ et d'angle } \theta.}$$

Partie B

On considère l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M d'affixe z vérifiant

$$|z| = \left|z + \overline{z}\,\mathrm{e}^{i\pi/3} - 3\mathrm{e}^{i\pi/6}\right|.$$

Question 4.a. La droite D a pour équation

$$\sqrt{3}x + y = 3.$$

Son vecteur normal est

$$\vec{n} = (\sqrt{3}, 1).$$

Le projeté orthogonal $M'(x', y')$ de $M(x, y)$ sur D est donné par

$$M' = M - \frac{\sqrt{3}x + y - 3}{\sqrt{3}^2 + 1}(\sqrt{3}, 1).$$

Comme $\sqrt{3}^2 + 1 = 4$, on obtient

$$\boxed{\begin{cases} x' = \dfrac{x - \sqrt{3}y + 3\sqrt{3}}{4}, \\ y' = \dfrac{-\sqrt{3}x + 3y + 3}{4}. \end{cases}}$$

Question 4.b. Notons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. À partir des formules précédentes,

$$z' = \frac{x - \sqrt{3}y + 3\sqrt{3}}{4} + i\frac{-\sqrt{3}x + 3y + 3}{4}.$$

On vérifie, en développant

$$\frac{1}{2}\left(z - \overline{z}\,\mathrm{e}^{i\pi/3} + 3\mathrm{e}^{i\pi/6}\right),$$

que l'on retrouve exactement cette expression. Donc

$$\boxed{z' = \frac{1}{2}\left(z - \overline{z}\,\mathrm{e}^{i\pi/3} + 3\mathrm{e}^{i\pi/6}\right).}$$

Question 5. On en déduit immédiatement

$$\begin{aligned} z - z' &= z - \frac{1}{2}\left(z - \overline{z}\,\mathrm{e}^{i\pi/3} + 3\mathrm{e}^{i\pi/6}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(z + \overline{z}\,\mathrm{e}^{i\pi/3} - 3\mathrm{e}^{i\pi/6}\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{z - z' = \frac{1}{2}\left(z + \overline{z}\,\mathrm{e}^{i\pi/3} - 3\mathrm{e}^{i\pi/6}\right).}$$

Question 6. Par définition de $\mathcal{C}$,

$$M \in \mathcal{C} \iff |z| = \left|z + \overline{z}\,\mathrm{e}^{i\pi/3} - 3\mathrm{e}^{i\pi/6}\right|.$$

D'après la question précédente,

$$\left|z + \overline{z}\,\mathrm{e}^{i\pi/3} - 3\mathrm{e}^{i\pi/6}\right| = 2|z - z'|.$$

Or $|z| = OM$ et $|z - z'| = MM' = d(M, D)$, puisque M' est le projeté orthogonal de M sur D. Ainsi

$$M \in \mathcal{C} \iff OM = 2d(M, D).$$

Donc $\mathcal{C}$ est une conique de foyer O, de directrice D et d'excentricité 2. Comme $2 > 1$, c'est une hyperbole.

$$\boxed{\mathcal{C} \text{ est une hyperbole de foyer } O, \text{ de directrice } D : \sqrt{3}x + y = 3, \text{ et d'excentricité } 2.}$$

Partie C

Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à D dont l'abscisse est positive.

Question 7. On peut choisir

$$\vec{n} = (\sqrt{3}, 1).$$

L'angle $\alpha = (\vec{e}_1, \vec{n})$ vérifie

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin\alpha = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{6}.}$$

Question 8.a. On note $\mathcal{C}'$ l'ensemble des points N d'affixe Z tels que le point M d'affixe

$$z = \mathrm{e}^{i\alpha} Z$$

appartienne à $\mathcal{C}$. Comme $\alpha = \pi/6$, on a

$$z = \mathrm{e}^{i\pi/6} Z, \qquad \overline{z} = \mathrm{e}^{-i\pi/6}\overline{Z}.$$

Alors

$$\begin{aligned} z + \overline{z}\,\mathrm{e}^{i\pi/3} - 3\mathrm{e}^{i\pi/6} &= \mathrm{e}^{i\pi/6} Z + \mathrm{e}^{-i\pi/6}\overline{Z}\,\mathrm{e}^{i\pi/3} - 3\mathrm{e}^{i\pi/6} \\ &= \mathrm{e}^{i\pi/6}\left(Z + \overline{Z} - 3\right). \end{aligned}$$

Comme le module de $\mathrm{e}^{i\pi/6}$ vaut 1,

$$M \in \mathcal{C} \iff |Z| = |Z + \overline{Z} - 3|.$$

Donc

$$\boxed{N \in \mathcal{C}' \iff |Z| = |Z + \overline{Z} - 3|.}$$

Question 8.b. Écrivons

$$Z = X + iY.$$

Alors

$$Z + \overline{Z} - 3 = 2X - 3.$$

La condition devient

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = |2X - 3|.$$

En élevant au carré,

$$X^2 + Y^2 = (2X - 3)^2 = 4X^2 - 12X + 9.$$

Ainsi

$$\boxed{3X^2 - 12X - Y^2 + 9 = 0.}$$

En revenant aux notations cartésiennes (x, y) pour $\mathcal{C}'$, on écrit

$$\boxed{3x^2 - 12x - y^2 + 9 = 0.}$$

Question 8.c. On complète le carré :

$$3x^2 - 12x - y^2 + 9 = 0 \iff 3(x-2)^2 - y^2 = 3.$$

Donc

$$\boxed{\frac{(x-2)^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1.}$$

La conique $\mathcal{C}'$ est donc une hyperbole de centre

$$\boxed{\Omega = (2, 0).}$$

Ses sommets sont

$$\boxed{S_1 = (1, 0), \qquad S_2 = (3, 0).}$$

Ses asymptotes sont données par

$$\boxed{y = \sqrt{3}(x-2) \qquad \text{et} \qquad y = -\sqrt{3}(x-2).}$$

On peut aussi noter que ses foyers sont

$$F_1 = (0, 0), \qquad F_2 = (4, 0),$$

car $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ et $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$.

Question 8.d. Soit

$$F(x, y) = 3x^2 - 12x - y^2 + 9.$$

Alors

$$\nabla F(x, y) = (6x - 12, -2y).$$

Au point $G = (0, 3)$,

$$\nabla F(0, 3) = (-12, -6).$$

Une équation de la tangente à $\mathcal{C}'$ en G est donc

$$-12(x-0) - 6(y-3) = 0.$$

Après simplification,

$$\boxed{2x + y - 3 = 0.}$$

Question 9.a. Le tracé de $\mathcal{C}'$ est celui de l'hyperbole

$$\frac{(x-2)^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Pour le réaliser proprement à l'échelle 1 cm :

- placer le centre $\Omega = (2, 0)$;
- placer les sommets $(1, 0)$ et $(3, 0)$;
- tracer les asymptotes $y = \sqrt{3}(x-2)$ et $y = -\sqrt{3}(x-2)$;
- tracer les deux branches de l'hyperbole, ouvertes vers la gauche et vers la droite ;
- placer enfin la tangente en $G = (0, 3)$ d'équation $2x + y - 3 = 0$.

Question 9.b. Par définition, $z = e^{i\alpha}Z$ avec $\alpha = \pi/6$. Le point M d'affixe z est donc l'image du point N d'affixe Z par la rotation de centre O et d'angle $\pi/6$.

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{C} \text{ s'obtient à partir de } \mathcal{C}' \text{ par la rotation de centre } O \text{ et d'angle } \frac{\pi}{6}.}$$

Partie D

On travaille maintenant dans $\mathbb{R}^3$. On considère

$$\mathcal{C}'' : \begin{cases} 3x^2 - y^2 = 3, \\ z = 1, \end{cases}$$

et

$$S : -3x^2 + y^2 + 3z^2 = 0.$$

Question 10. Soit $(x, y, z) \in \mathcal{C}''$. Alors

$$z = 1 \qquad \text{et} \qquad 3x^2 - y^2 = 3.$$

Donc

$$-3x^2 + y^2 + 3z^2 = -(3x^2 - y^2) + 3 = -3 + 3 = 0.$$

Ainsi $(x, y, z) \in S$. Donc

$$\boxed{\mathcal{C}'' \subset S.}$$

Question 11.a. La surface S est la surface de niveau 0 de la fonction

$$F(x, y, z) = -3x^2 + y^2 + 3z^2.$$

On a

$$\nabla F(x, y, z) = (-6x, 2y, 6z).$$

Un point de S est régulier si et seulement si ce gradient n'est pas nul. Or

$$\nabla F(x, y, z) = 0 \iff x = y = z = 0.$$

Comme $(0, 0, 0) \in S$, le seul point singulier est l'origine. Ainsi

$$\boxed{\text{les points réguliers de } S \text{ sont tous les points de } S \setminus \{(0, 0, 0)\}.}$$

Question 11.b. Le point $J = (2, -3, -1)$ appartient à S, car

$$-3 \cdot 2^2 + (-3)^2 + 3(-1)^2 = -12 + 9 + 3 = 0.$$

Le gradient en J vaut

$$\nabla F(J) = (-12, -6, -6).$$

Une équation du plan tangent à S en J est donc

$$-12(x - 2) - 6(y + 3) - 6(z + 1) = 0.$$

En divisant par -6, on obtient

$$2(x - 2) + (y + 3) + (z + 1) = 0,$$

donc

$$\boxed{2x + y + z = 0.}$$

Question 12.a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le plan

$$P_\lambda : 2x + \sqrt{2}z = \lambda.$$

Plaçons-nous dans le repère orthonormé de base

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}e_1 - \sqrt{\frac{2}{3}}e_3, \qquad E_2 = e_2, \qquad E_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_3.$$

Si (ξ, η, ζ) sont les coordonnées dans cette base, alors

$$x = \frac{\xi}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\zeta, \qquad y = \eta, \qquad z = -\sqrt{\frac{2}{3}}\,\xi + \frac{\zeta}{\sqrt{3}}.$$

On vérifie que

$$2x + \sqrt{2}z = \sqrt{6}\,\zeta.$$

Ainsi le plan P_λ a pour équation

$$\zeta = \frac{\lambda}{\sqrt{6}}.$$

Dans ces coordonnées, l'équation de S devient

$$\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 - 4\sqrt{2}\xi\zeta = 0.$$

Pour ζ fixé, on complète le carré :

$$\xi^2 - 4\sqrt{2}\xi\zeta + \eta^2 - \zeta^2 = 0 \iff (\xi - 2\sqrt{2}\zeta)^2 + \eta^2 = 9\zeta^2.$$

Dans le plan P_λ, on obtient donc

$$(\xi - 2\sqrt{2}\,\lambda/\sqrt{6})^2 + \eta^2 = 9\frac{\lambda^2}{6}.$$

C'est un cercle dans le plan P_λ, de rayon

$$\frac{3|\lambda|}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}}|\lambda|.$$

Pour $\lambda = 0$, ce cercle est réduit au point O.

Ainsi

$$\boxed{C_\lambda = S \cap P_\lambda \text{ est un cercle, éventuellement réduit à un point.}}$$

En particulier, l'énoncé « soit vide, soit un cercle » est vérifié ; ici l'intersection n'est jamais vide.

Question 12.b. Non. Le fait qu'une famille de plans parallèles découpe des cercles sur une surface ne suffit pas à conclure que cette surface est une surface de révolution.

On peut le voir directement sur la forme quadratique

$$q(x, y, z) = -3x^2 + y^2 + 3z^2.$$

Sa matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

dont les valeurs propres sont

$$-3, \quad 1, \quad 3.$$

Elles sont deux à deux distinctes. Or une quadrique de révolution définie par une forme quadratique possède, dans une base orthonormée adaptée, deux coefficients égaux dans le plan orthogonal à son axe de révolution. Ce n'est pas le cas ici.

Donc

$$\boxed{S \text{ n'est pas une surface de révolution.}}$$

Question 13. On note $\mathcal{C}''_+$ l'ensemble des points de $\mathcal{C}''$ d'abscisse positive. Sur $\mathcal{C}''$, on a

$$z = 1, \qquad 3x^2 - y^2 = 3.$$

Donc

$$y^2 = 3x^2 - 3.$$

Comme on impose $x > 0$, on a en fait $x \geq 1$.

Lorsqu'on fait tourner $\mathcal{C}''_+$ autour de l'axe des abscisses (Ox), l'abscisse x reste inchangée, et la distance à l'axe (Ox) devient

$$r = \sqrt{Y^2 + Z^2}.$$

Sur la courbe initiale, cette distance vaut

$$r^2 = y^2 + z^2 = y^2 + 1 = (3x^2 - 3) + 1 = 3x^2 - 2.$$

Ainsi la surface de révolution Σ est donnée par

$$Y^2 + Z^2 = 3x^2 - 2, \qquad x \geq 1.$$

En renommant les coordonnées (x, y, z),

$$\boxed{\Sigma : \quad y^2 + z^2 = 3x^2 - 2, \qquad x \geq 1.}$$

Ou encore,

$$\boxed{3x^2 - y^2 - z^2 = 2, \qquad x \geq 1.}$$