Correction détaillée

Concours Centrale-Supélec – Mathématiques 2 – MP/MPI

Fonction zêta, fonctions de Beurling et critère géométrique

On note, pour $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière. Pour $s \in \mathbb{C}$, on écrit $s = x + iy$ avec $x = \mathrm{Re}(s)$ et $y = \mathrm{Im}(s)$. Pour $k \geq 2$ et $t \in]0, 1]$, on pose

$$f_k(t) = \frac{1}{k} \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor.$$

Partie A – Questions préliminaires

I – La fonction ζ sur $]1, +\infty[$

Q1. Pour $k \geq 1$, $u_k(s) = k^{-s}$ sur $]1, +\infty[$. On a

$$\sup_{s>1} |u_k(s)| = \sup_{s>1} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{k}$$

(le supremum est atteint à la limite lorsque $s \to 1^+$). Or $\sum_{k\geq 1} 1/k$ diverge. Donc la série de fonctions $\sum u_k$ ne converge pas normalement sur $]1, +\infty[$.

Q2. Soit $a > 1$. Sur $[a, +\infty[$,

$$|u_k(s)| \leq \frac{1}{k^a},$$

et la série $\sum 1/k^a$ converge. La série $\sum u_k$ converge donc normalement, donc uniformément, sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 1$. Comme les fonctions u_k sont continues, leur somme est continue sur chacun de ces intervalles. Tout point $s_0 > 1$ appartenant à un tel intervalle, la fonction

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$$

est continue sur $]1, +\infty[$.

Q3. Pour tout réel $s > 1$, tous les termes $1/k^s$ sont strictement positifs. Ainsi

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} > 0.$$

La fonction ζ ne s'annule donc pas sur $]1, +\infty[$; elle y est strictement positive.

II – Cas de la variable complexe

Q4. Pour $t > 0$ et $s = x + iy$, on a

$$t^s = e^{s \ln t} = e^{x \ln t} e^{iy \ln t}.$$

Comme $|e^{iy \ln t}| = 1$, il vient

$$|t^s| = e^{x \ln t} = t^x = t^{\mathrm{Re}(s)}.$$

Q5. Supposons $\mathrm{Re}(s) = x > 1$. Alors

$$\left|\frac{1}{k^s}\right| = \frac{1}{|k^s|} = \frac{1}{k^x}.$$

La série $\sum_{k\geq 1} 1/k^x$ converge puisque $x > 1$. Par comparaison, la série $\sum_{k\geq 1} 1/k^s$ converge absolument. On peut donc définir

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1).$$

Q6. Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\left|\frac{1}{p_i^s}\right| = \frac{1}{p_i^x} < 1.$$

La série géométrique $\sum_{m_i\geq 0} p_i^{-m_i s}$ converge absolument. Le produit fini de ces séries absolument convergentes donne une famille sommable sur $\mathbb{N}^n$, et

$$\begin{aligned} S_n(s) &= \sum_{(m_1,\dots,m_n)\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{(p_1^{m_1}\cdots p_n^{m_n})^s} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{m_i=0}^{+\infty} \frac{1}{p_i^{m_i s}}\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-p_i^{-s}}. \end{aligned}$$

Q7. Par unicité de la décomposition en facteurs premiers,

$$S_n(s) = \sum_{k\in N_n} \frac{1}{k^s},$$

où N_n est l'ensemble des entiers non nuls dont les facteurs premiers appartiennent à $\{p_1, \dots, p_n\}$. Les ensembles N_n sont croissants et leur réunion est $\mathbb{N}^*$. Comme la série $\sum k^{-s}$ converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, on peut passer à la limite dans les sommes partielles indexées par N_n :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = \zeta(s).$$

C'est la formule du produit eulérien dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Dans les questions suivantes, on note toujours $x = \mathrm{Re}(s) > 1$.

Q8. Pour $s = x$ réel, la question précédente donne

$$S_n(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-p_i^{-x}} \leq \zeta(x),$$

car $S_n(x)$ est une somme partielle positive de $\zeta(x)$. En prenant le logarithme,

$$\sum_{i=1}^{n} -\ln(1-p_i^{-x}) \leq \ln\zeta(x).$$

Or, pour $u \in]0,1[$, on a $u \leq -\ln(1-u)$. Donc

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^x} \leq \ln\zeta(x).$$

Les sommes partielles étant croissantes et majorées, la série

$$\sum_{i\geq 1} \frac{1}{p_i^x}$$

est convergente.

Q9. On écrit
$$a_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i^x}{p_i^x + 1} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + p_i^{-x}}.$$
Alors
$$\ln(a_n) = -\sum_{i=1}^{n} \ln(1 + p_i^{-x}).$$
Comme $\ln(1+u) \sim u$ lorsque $u \to 0$ et comme $\sum p_i^{-x}$ converge d'après Q8, la série
$$\sum_{i \geq 1} \ln(1 + p_i^{-x})$$
converge. Ainsi $\ln(a_n)$ converge vers un réel fini ℓ, donc
$$a_n \longrightarrow a = e^{\ell} > 0.$$
La suite (a_n) converge donc vers un réel strictement positif.

Q10. D'après Q6,
$$|S_n(s)| = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{|1 - p_i^{-s}|}.$$
Or $|1 - z| \leq 1 + |z|$, donc
$$|1 - p_i^{-s}| \leq 1 + |p_i^{-s}| = 1 + p_i^{-x}.$$
Par conséquent
$$|S_n(s)| \geq \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + p_i^{-x}} = a_n.$$
En faisant tendre n vers $+\infty$, Q7 et Q9 donnent
$$|\zeta(s)| = \lim_{n \to +\infty} |S_n(s)| \geq \lim_{n \to +\infty} a_n = a > 0.$$
Ainsi $\zeta(s) \neq 0$ pour tout s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$.

III – Un calcul d'intégrale

Q11. Soit $s = x + iy$ avec $x > 1/2$. Pour $t \in]0, 1]$,
$$|t^{s-1}|^2 = t^{s-1}\overline{t^{s-1}} = t^{2x-2}.$$
La fonction $t \mapsto t^{2x-2}$ est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $2x - 2 > -1$, c'est-à-dire $x > 1/2$. Donc $t \mapsto t^{2(s-1)}$ est absolument intégrable sur $]0, 1]$ et
$$\int_0^1 |t^{s-1}|^2 \, \mathrm{d}t = \int_0^1 t^{2x-2} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{2\,\mathrm{Re}(s) - 1}.$$

IV – Une étude géométrique

Pour $d \in]0,1]$, on considère l'ensemble Δ_d des points d'affixe $s = x + iy$ vérifiant

$$d^2|s|^2 > 2\,\mathrm{Re}(s) - 1.$$

Q12. L'inégalité s'écrit

$$d^2(x^2+y^2) - 2x + 1 > 0.$$

En divisant par d^2 puis en complétant le carré,

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{d^2}x + \frac{1}{d^2} > 0 \iff \left(x - \frac{1}{d^2}\right)^2 + y^2 > \frac{1-d^2}{d^4}.$$

Ainsi Δ_d est le complémentaire du disque fermé

$$D_d = \left\{ s \in \mathbb{C} : \left| s - \frac{1}{d^2} \right| \leq \frac{\sqrt{1-d^2}}{d^2} \right\}.$$

Le centre est donc

$$O_d = \frac{1}{d^2} \in \mathbb{R}$$

et le rayon est

$$R_d = \frac{\sqrt{1-d^2}}{d^2}.$$

Pour $d = 1$, le disque est réduit au point 1.

Q13. On a, pour $d \in]0,1[$,

$$g(d) = \frac{1}{d^2} - \frac{\sqrt{1-d^2}}{d^2} = \frac{1-\sqrt{1-d^2}}{d^2}.$$

En rationalisant,

$$g(d) = \frac{1}{1+\sqrt{1-d^2}}.$$

Lorsque d parcourt $]0,1[$, $\sqrt{1-d^2}$ parcourt $]0,1[$. Donc $1+\sqrt{1-d^2}$ parcourt $]1,2[$ et

$$g(]0,1[) = \left] \frac{1}{2}, 1 \right[.$$

Q14. Montrons que

$$\bigcap_{d \in]0,1]} \Delta_d = \{ s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) \leq 1/2 \}.$$

Si $\mathrm{Re}(s) = x \leq 1/2$, alors $2x - 1 \leq 0$. Comme $d^2|s|^2 \geq 0$, et même $d^2|s|^2 > 0$ lorsque $x = 1/2$, on a bien

$$d^2|s|^2 > 2x - 1$$

pour tout $d \in]0,1]$. Donc $s \in \Delta_d$ pour tout d.

Réciproquement, supposons $x > 1/2$. Comme $|s| > 0$, on peut choisir $d \in]0,1]$ tel que

$$d^2 \leq \frac{2x-1}{|s|^2}.$$

Alors $d^2|s|^2 \leq 2x - 1$, donc $s \notin \Delta_d$. Ainsi s n'appartient pas à l'intersection. D'où le résultat.

Partie B – Étude analytique

I – Transformée de Mellin des fonctions f_k

Q15. Pour $i \in \{1, \ldots, k\}$,

$$f_k\left(\frac{1}{i}\right) = \frac{1}{k}\lfloor i \rfloor - \left\lfloor \frac{i}{k} \right\rfloor = \frac{i}{k} - \left\lfloor \frac{i}{k} \right\rfloor.$$

Donc

$$f_k\left(\frac{1}{i}\right) = \begin{cases} \dfrac{i}{k}, & 1 \leq i \leq k-1, \\ 0, & i = k. \end{cases}$$

Q16. Soit $t \in]0,1]$ et posons

$$m = \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor.$$

Effectuons la division euclidienne de m par k :

$$m = qk + r, \qquad q \in \mathbb{N}, \qquad r \in \{0, 1, \ldots, k-1\}.$$

Comme $m \leq 1/t < m+1$, on a

$$q + \frac{r}{k} \leq \frac{1}{kt} < q + \frac{r+1}{k} \leq q + 1,$$

avec borne supérieure non atteinte. Ainsi

$$\left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor = q.$$

On obtient donc

$$f_k(t) = \frac{qk+r}{k} - q = \frac{r}{k}.$$

Par conséquent

$$0 \leq f_k(t) \leq \frac{k-1}{k}.$$

Q17. La question précédente montre que les valeurs possibles de f_k sont incluses dans

$$\left\{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}\right\}.$$

La question Q15 montre que chacune de ces valeurs est effectivement prise : i/k est prise en $t = 1/i$ pour $1 \leq i \leq k-1$, et 0 est prise en $t = 1/k$. Ainsi

$$f_k(]0,1]) = \left\{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}\right\}.$$

Q18. Pour $m \geq 1$ et $t \in \left]\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}\right]$, on a $\lfloor 1/t \rfloor = m$. D'après la preuve de Q16,

$$f_k(t) = \frac{m}{k} - \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor,$$

qui est constant sur cet intervalle. La fonction f_k est donc constante par morceaux sur $]0,1]$; sur tout segment $[a,1] \subset]0,1]$, il n'y a qu'un nombre fini de morceaux.

De plus, Q16 donne $0 \leq f_k(t) \leq (k-1)/k \leq 1$. Ainsi l'intégrale impropre converge, car

$$0 \leq \int_\varepsilon^1 f_k(t)\,\mathrm{d}t \leq 1-\varepsilon$$

et le critère de Cauchy au voisinage de 0 est immédiat par la majoration de l'intégrale sur $]0,\varepsilon]$ par ε. Donc f_k est intégrable sur $]0,1]$.

Dans les questions Q19 à Q21, s est un réel strictement supérieur à 1.

Q19. Pour $k \geq 1$ et $t \in]0,1]$,

$$0 \leq \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor t^{s-1} \leq \frac{1}{kt} t^{s-1} = \frac{1}{k} t^{s-2}.$$

Comme $s > 1$, l'intégrale $\int_0^1 t^{s-2}\,\mathrm{d}t$ converge. Par comparaison,

$$\int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor t^{s-1}\,\mathrm{d}t$$

converge.

On note désormais

$$F(s) = \int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor t^{s-1}\,\mathrm{d}t.$$

Q20. Sur l'intervalle $\left]\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}\right]$, on a $\lfloor 1/t \rfloor = j$. Donc

$$F(s) = \sum_{j=1}^{+\infty} j \int_{1/(j+1)}^{1/j} t^{s-1}\,\mathrm{d}t.$$

Calculons la somme partielle :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} j \int_{1/(j+1)}^{1/j} t^{s-1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{N} j \left(\frac{1}{j^s} - \frac{1}{(j+1)^s} \right) \\ &= \frac{1}{s} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^s} - \frac{N}{(N+1)^s} \right).\end{aligned}$$

Comme $s > 1$, $N/(N+1)^s \to 0$. Il vient

$$F(s) = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^s} = \frac{1}{s}\zeta(s).$$

Q21. On écrit

$$\int_0^1 f_k(t) t^{s-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k} \int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor t^{s-1}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor t^{s-1}\,\mathrm{d}t.$$

Dans la seconde intégrale, posons $u = kt$. Alors

$$\int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{kt} \right\rfloor t^{s-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^s} \int_0^k \left\lfloor \frac{1}{u} \right\rfloor u^{s-1}\,\mathrm{d}u.$$

Pour $u > 1$, $\lfloor 1/u \rfloor = 0$, donc cette dernière intégrale vaut $k^{-s}F(s)$. Ainsi

$$\int_0^1 f_k(t) t^{s-1}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s} \right) F(s).$$

En utilisant Q20,

$$\boxed{\int_0^1 f_k(t) t^{s-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s} \right) \zeta(s).}$$

II – Prolongement de la fonction ζ

Dans cette sous-partie, s est un réel strictement positif.

Q22. Pour $h(t) = t^{-s}$, on a

$$h'(t) = -\frac{s}{t^{s+1}}.$$

La fonction $t \mapsto |h'(t)| = s/t^{s+1}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. Son maximum sur $[k, k+1]$ est donc atteint en k et vaut

$$\max_{t \in [k,k+1]} |h'(t)| = \frac{s}{k^{s+1}}.$$

Q23. Pour $t \in [k, k+1]$, on a $t \geq k$, donc

$$\frac{1}{k^s} - \frac{1}{t^s} \geq 0,$$

et l'intégrale est strictement positive. Par l'inégalité des accroissements finis et Q22,

$$0 \leq \frac{1}{k^s} - \frac{1}{t^s} \leq \frac{s}{k^{s+1}}(t-k) \leq \frac{s}{k^{s+1}}.$$

Ainsi

$$0 \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{t^s} \right) \mathrm{d}t \leq \frac{s}{k^{s+1}}.$$

La série est donc convergente par comparaison avec $\sum k^{-(s+1)}$, puisque $s+1 > 1$. En notant sa somme $G(s)$,

$$0 < G(s) \leq s \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{s+1}} = s\zeta(s+1).$$

L'inégalité stricte à droite est vraie également, car chaque majoration n'est pas simultanément une égalité sur tout l'intervalle ; on retient

$$0 < G(s) < s\zeta(s+1).$$

Q24. Supposons $s > 1$. Par définition,

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{k^s} - \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \right] \\ &= \zeta(s) - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}. \end{aligned}$$

Or

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} = \frac{1}{s-1}.$$

Donc

$$\boxed{\zeta(s) - G(s) = \frac{1}{s-1}.}$$

Lorsque $s \to 1^+$, Q23 donne par exemple, pour $1 < s \leq 2$,

$$0 < G(s) < s\zeta(s+1) \leq 2\zeta(2),$$

donc $G(s) = O(1)$. Par conséquent

$$\boxed{\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + O(1) \qquad (s \to 1^+).}$$

On admet ensuite le prolongement annoncé par l'énoncé : pour $0 < \mathrm{Re}(s) \leq 1$, $s \neq 1$,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + G(s).$$

III – Intégrale des fonctions f_k

Q25. Soit $k \geq 2$. Pour $s > 1$ réel et $t \in]0,1]$, on a $0 < t^{s-1} \leq 1$ et $t^{s-1} \to 1$ lorsque $s \to 1^+$. D'après Q16, f_k est bornée, donc $|f_k(t)t^{s-1}| \leq |f_k(t)|$, et f_k est intégrable d'après Q18. Par convergence dominée,

$$\int_0^1 f_k(t)t^{s-1}\,\mathrm{d}t \longrightarrow \int_0^1 f_k(t)\,\mathrm{d}t \qquad (s \to 1^+).$$

Q26. D'après Q21,

$$\int_0^1 f_k(t)t^{s-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s}\right)\zeta(s).$$

Lorsque $s \to 1^+$,

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s} = \frac{1}{k}\left(1 - e^{-(s-1)\ln k}\right) \sim \frac{(s-1)\ln k}{k}.$$

De plus, Q24 donne

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + O(1),$$

donc

$$\frac{1}{s}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s}\right)\zeta(s) \longrightarrow \frac{\ln k}{k}.$$

En utilisant Q25, on obtient

$$\boxed{\int_0^1 f_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\ln k}{k}.}$$

Partie C – Étude algébrique et géométrique

On note E l'espace des fonctions réelles continues par morceaux sur $]0,1]$. On note L^2 l'ensemble des fonctions $f \in E$ telles que $\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge.

I – Une forme bilinéaire symétrique positive

Q27. Les fonctions considérées appartiennent à E.

a) Vrai. Si f est bornée sur $]0,1]$, il existe $M \geq 0$ tel que $|f| \leq M$. Alors $0 \leq f^2 \leq M^2$, donc $\int_0^1 f^2$ converge.

b) Faux. Par exemple $f(t) = 1/t$ appartient à E, mais $f(t)^2 = 1/t^2$ n'est pas intégrable au voisinage de 0. Donc $E \neq L^2$.

c) Faux. La fonction $f(t) = 1/\sqrt{t}$ est intégrable sur $]0,1]$, car $\int_0^1 t^{-1/2}\,\mathrm{d}t = 2$, mais $f(t)^2 = 1/t$ n'est pas intégrable au voisinage de 0. Elle n'appartient donc pas à L^2.

Q28. Soient $f, g \in L^2$. Pour tout t,

$$|f(t)g(t)| \leq \frac{1}{2}\left(f(t)^2 + g(t)^2\right).$$

Le membre de droite est intégrable sur $]0,1]$, donc fg est absolument intégrable.

Montrons maintenant que L^2 est un sous-espace vectoriel de E. La fonction nulle est dans L^2. Si $f, g \in L^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + g \in E$ et

$$(\lambda f + g)^2 \leq 2\lambda^2 f^2 + 2g^2.$$

Le membre de droite est intégrable, donc $\lambda f + g \in L^2$. Ainsi L^2 est un sous-espace vectoriel de E.

Q29. Pour $f, g \in L^2$, l'intégrale $\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie d'après Q28. L'application

$$(f,g) \longmapsto (f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

est bilinéaire par linéarité de l'intégrale, symétrique car $f(t)g(t) = g(t)f(t)$, et positive car

$$(f|f) = \int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \geq 0.$$

Elle n'est pas définie positive sur tout L^2. En effet, considérons

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t = \frac{1}{2}, \\ 0, & t \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Cette fonction est continue par morceaux, appartient à L^2, n'est pas la fonction nulle, mais

$$(f|f) = \int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t = 0.$$

La forme n'est donc pas un produit scalaire sur L^2.

II – Un espace préhilbertien réel

Soit $n \geq 2$ et soit $(\lambda_k)_{2 \leq k \leq n}$ une famille de réels telle que

$$\sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k = 0 \qquad \text{sur }]0,1].$$

Q30. Pour $t \in]1/2, 1]$, on a $\lfloor 1/t \rfloor = 1$ et, pour tout $k \geq 2$, $\lfloor 1/(kt) \rfloor = 0$. Ainsi

$$f_k(t) = \frac{1}{k}.$$

En évaluant la relation donnée en un tel t, on obtient

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda_k}{k} = 0.}$$

Q31. Soit $\ell \in \{2, \ldots, n-1\}$. Évaluons la relation en $t = 1/\ell$. Alors

$$f_k\left(\frac{1}{\ell}\right) = \frac{\ell}{k} - \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor.$$

Pour $k = \ell$, ce terme vaut 0. Pour $k > \ell$, il vaut ℓ/k. On obtient donc

$$\boxed{\sum_{k=\ell+1}^{n} \lambda_k \frac{\ell}{k} + \sum_{k=2}^{\ell-1} \lambda_k \left(\frac{\ell}{k} - \left\lfloor \frac{\ell}{k} \right\rfloor \right) = 0.}$$

Lorsque $\ell = 2$, la deuxième somme est vide, comme indiqué dans l'énoncé.

Q32. Pour $\ell = 2$, Q31 donne

$$\sum_{k=3}^{n} \lambda_k \frac{2}{k} = 0.$$

Q30 donne
$$\frac{\lambda_2}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{\lambda_k}{k}=0.$$
En multipliant cette dernière égalité par 2 et en utilisant l'égalité précédente, on obtient $\lambda_2=0$.

On montre ensuite par récurrence que tous les λ_k sont nuls. Supposons que
$$\lambda_2=\cdots=\lambda_{\ell-1}=0$$
pour un certain $\ell\in\{3,\dots,n-1\}$. Alors Q31 donne
$$\sum_{k=\ell+1}^{n}\lambda_k\frac{\ell}{k}=0,$$
et Q30 donne, puisque les coefficients précédents sont nuls,
$$\frac{\lambda_\ell}{\ell}+\sum_{k=\ell+1}^{n}\frac{\lambda_k}{k}=0.$$
En multipliant par ℓ et en utilisant l'égalité issue de Q31, il vient $\lambda_\ell=0$.

On obtient donc $\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$, puis Q30 donne $\lambda_n/n=0$, donc $\lambda_n=0$. La famille $(f_k)_{k\geq 2}$ est donc libre.

On considère le sous-espace F de L^2 engendré par les fonctions f_k pour $k\geq 2$ et par la fonction constante égale à 1, notée $\mathbf{1}$.

Q33. La forme $(\cdot|\cdot)$ est déjà bilinéaire, symétrique et positive sur L^2. Il reste à vérifier qu'elle est définie positive sur F.

Soit
$$u=\lambda_0\mathbf{1}+\sum_{k=2}^{n}\lambda_k f_k\in F$$
tel que $(u|u)=0$. Alors $\int_0^1 u(t)^2\,\mathrm{d}t=0$, donc $u=0$ sur chaque intervalle de continuité. Comme une combinaison finie de fonctions f_k est constante par morceaux et continue à gauche aux points $1/m$, on en déduit que u est identiquement nulle sur $]0,1]$.

Pour $m\geq 1$, en évaluant en $t=1/m$, on obtient
$$\lambda_0+\sum_{k=2}^{n}\lambda_k\left(\frac{m}{k}-\left\lfloor\frac{m}{k}\right\rfloor\right)=0.$$
Posons
$$v_m=\lambda_0+\sum_{k=2}^{n}\lambda_k\left\{\frac{m}{k}\right\}=0,$$
où $\{\cdot\}$ désigne la partie fractionnaire. Alors, pour $m\geq 2$,
$$0=v_m-v_{m-1}=\sum_{k=2}^{n}\lambda_k\left(\frac{1}{k}-\mathbf{1}_{k|m}\right).$$
En notant $A=\sum_{k=2}^{n}\lambda_k/k$, cela donne
$$\sum_{\substack{2\leq k\leq n\\ k|m}}\lambda_k=A\qquad(m\geq 2).$$
En choisissant m premier strictement supérieur à n, on obtient $A=0$. Ainsi, pour tout $m\geq 2$,
$$\sum_{\substack{2\leq k\leq n\\ k|m}}\lambda_k=0.$$

Une récurrence immédiate sur $m = 2, 3, \dots, n$ donne successivement $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \dots, \lambda_n = 0$. Enfin, $v_1 = 0$ donne $\lambda_0 = 0$.

Donc $(u|u) = 0$ implique $u = 0$ dans F. La forme $(\cdot|\cdot)$ définit bien un produit scalaire sur F.

III – Distance d'un vecteur à des sous-espaces

On travaille dans l'espace préhilbertien réel

$$F = \mathrm{Vect}(\mathbf{1}, f_2, f_3, \dots)$$

muni du produit scalaire précédent.

Q34. Pour $n \geq 2$, la famille $(f_2, \dots, f_n)$ est libre d'après Q32. On peut donc appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à cette famille dans l'espace préhilbertien F.

On obtient une famille orthonormale $(e_2, \dots, e_n)$ telle que, pour tout $p \in \{2, \dots, n\}$,

$$\mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_p) = \mathrm{Vect}(f_2, \dots, f_p).$$

À chaque étape, on choisit le signe du vecteur normalisé de façon à imposer

$$(e_p|f_p) > 0.$$

Cette condition fixe le signe et assure l'unicité. En effet, si une autre famille orthonormale satisfait les mêmes propriétés et les mêmes conditions de signe, l'unicité du vecteur orthogonal unitaire au sous-espace précédent dans la droite ajoutée par f_p impose, par récurrence sur p, l'égalité des deux familles.

Pour $n \geq 2$, on note d_n la distance de la fonction $\mathbf{1}$ au sous-espace $V_n = \mathrm{Vect}(f_2, \dots, f_n)$.

Q35. La famille $(e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de V_n. Le projeté orthogonal de $\mathbf{1}$ sur V_n est donc

$$p_n = \sum_{k=2}^{n} (\mathbf{1}|e_k) e_k.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} d_n^2 &= \|\mathbf{1} - p_n\|^2 \\ &= \|\mathbf{1}\|^2 - \sum_{k=2}^{n} (\mathbf{1}|e_k)^2. \end{aligned}$$

Or

$$\|\mathbf{1}\|^2 = (\mathbf{1}|\mathbf{1}) = \int_0^1 1 \,\mathrm{d}t = 1.$$

Donc

$$\boxed{d_n^2 = 1 - \sum_{k=2}^{n} (\mathbf{1}|e_k)^2.}$$

Q36. Les sous-espaces V_n sont croissants :

$$V_n \subset V_{n+1}.$$

La distance d'un point à un sous-espace ne peut qu'être plus petite lorsque le sous-espace grandit. Ainsi

$$0 \leq d_{n+1} \leq d_n \qquad (n \geq 2).$$

La suite $(d_n)_{n \geq 2}$ est décroissante et minorée par 0 ; elle converge donc.

Partie D – Synthèse

On admet l'inégalité de Cauchy-Schwarz complexe sous la forme indiquée dans l'énoncé. Soit $n \geq 2$.

Q37. Posons

$$A(t) = 1 - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k(t).$$

La fonction A appartient à F, donc à L^2. D'après Q11, comme $\mathrm{Re}(s) > 1/2$, la fonction $t \mapsto t^{s-1}$ appartient aussi à L^2 au sens complexe, car

$$\int_0^1 |t^{s-1}|^2 \,\mathrm{d}t < +\infty.$$

On peut donc appliquer Cauchy-Schwarz à A et $t \mapsto t^{s-1}$:

$$\left| \int_0^1 A(t) t^{s-1} \,\mathrm{d}t \right|^2 \leq \int_0^1 |A(t)|^2 \,\mathrm{d}t \int_0^1 |t^{s-1}|^2 \,\mathrm{d}t.$$

Comme A est réelle,

$$|A(t)|^2 = A(t)^2.$$

On obtient bien

$$\boxed{\left| \int_0^1 \left(1 - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k(t)\right) t^{s-1} \,\mathrm{d}t \right|^2 \leq \int_0^1 \left(1 - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k(t)\right)^2 \mathrm{d}t \int_0^1 |t^{s-1}|^2 \,\mathrm{d}t.}$$

Avec Q11, le dernier facteur vaut $1/(2\,\mathrm{Re}(s) - 1)$.

Q38. On raisonne par l'absurde. Supposons que $s \neq 1$, $\mathrm{Re}(s) > 1/2$ et $\zeta(s) = 0$. On admet, comme dans l'énoncé, que l'égalité de Q21 reste valable pour un tel complexe s.

Pour tout $k \geq 2$,

$$\int_0^1 f_k(t) t^{s-1} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^s}\right)\zeta(s) = 0.$$

De plus,

$$\int_0^1 t^{s-1} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}$$

car $\mathrm{Re}(s) > 0$. Par conséquent, pour toute famille réelle $(\lambda_k)_{2 \leq k \leq n}$,

$$\int_0^1 \left(1 - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k(t)\right) t^{s-1} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}.$$

Choisissons maintenant les coefficients λ_k de sorte que

$$d_n^2 = \int_0^1 \left(1 - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k(t)\right)^2 \mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire ceux du projeté orthogonal de $\mathbf{1}$ sur $\mathrm{Vect}(f_2, \ldots, f_n)$. L'inégalité de Q37 et Q11 donnent

$$\frac{1}{|s|^2} \leq d_n^2 \cdot \frac{1}{2\,\mathrm{Re}(s) - 1}.$$

En fait l'inégalité est stricte. En effet, l'égalité dans Cauchy-Schwarz imposerait que la fonction réelle, constante par morceaux,

$$1 - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k(t)$$

soit proportionnelle presque partout à $t^{\bar{s}-1}$. Comme le membre de gauche n'est pas nul presque partout et est constant sur des intervalles non triviaux, cela forcerait $t^{\bar{s}-1}$ à être constant sur un intervalle, donc $s = 1$, contradiction. Ainsi

$$\boxed{d_n^2 |s|^2 > 2\,\mathrm{Re}(s) - 1.}$$

Si l'on suppose maintenant que $d_n \to 0$, alors le membre de gauche tend vers 0, tandis que $2\,\mathrm{Re}(s) - 1 > 0$. C'est impossible. Donc aucun tel zéro s ne peut exister dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1/2$.

Pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, la non-annulation a déjà été démontrée en Q10. Pour $1/2 < \mathrm{Re}(s) \leq 1$, le raisonnement précédent, fondé sur le prolongement admis, donne la même conclusion. Ainsi la condition

$$\boxed{d_n \longrightarrow 0}$$

est suffisante pour que la fonction ζ prolongée ne s'annule pas dans le demi-plan

$$\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}.$$