

Correction détaillée

Mathématiques 1 – PC – Découverte de la planète Neptune

Concours Centrale-Supélec – sujet transmis

Toutes les notations sont celles de l'énoncé. Le corrigé insiste sur les équivalences et les points de rédaction à ne pas négliger en copie.

Partie A – Étude du mouvement d'une planète seulement soumise à l'attraction du Soleil

On fixe $a > 0$, $c > 0$, $c < a$, et $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Les foyers sont

$$F = (c, 0), \quad F' = (-c, 0), \quad FF' = 2c.$$

I. Équation réduite de l'ellipse

Question 1. L'inégalité triangulaire appliquée aux trois points M, F, F' donne

$$MF \leq MF' + F'F \quad \text{et} \quad MF' \leq MF + FF'.$$

On en déduit

$$MF - MF' \leq FF' \quad \text{et} \quad MF' - MF \leq FF'.$$

Ainsi,

$$\boxed{|MF - MF'| \leq FF'}.$$

Cette forme est exactement celle qui sera utile dans la suite.

Question 2. Comme $FF' = 2c$ et $c < a$, on a

$$|MF - MF'| \leq 2c < 2a.$$

Donc $MF - MF'$ ne peut être égal ni à $2a$ ni à $-2a$. Autrement dit,

$$\boxed{MF - MF' - 2a \neq 0 \quad \text{et} \quad MF - MF' + 2a \neq 0.}$$

Question 3. Par définition,

$$M \in \mathcal{E} \iff MF + MF' = 2a \iff MF + MF' - 2a = 0.$$

Par ailleurs,

$$MF + MF' + 2a > 0,$$

et, d'après la question précédente,

$$MF - MF' - 2a \neq 0, \quad MF - MF' + 2a \neq 0.$$

Ainsi, parmi les quatre facteurs ci-dessous, seul le premier peut s'annuler. Donc

$$\boxed{M \in \mathcal{E} \iff (MF + MF' - 2a)(MF + MF' + 2a)(MF - MF' - 2a)(MF - MF' + 2a) = 0.}$$

Question 4. Posons, pour alléger les écritures,

$$p = MF, \quad q = MF'.$$

Le produit de la question précédente s'écrit

$$((p + q)^2 - 4a^2)((p - q)^2 - 4a^2) = 0.$$

Or

$$(p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq, \quad (p - q)^2 = p^2 + q^2 - 2pq.$$

Donc

$$\begin{aligned} (p^2 + q^2 + 2pq - 4a^2)(p^2 + q^2 - 2pq - 4a^2) &= 0 \\ \iff (p^2 + q^2 - 4a^2)^2 - (2pq)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Finalement,

$$M \in \mathcal{E} \iff ((MF)^2 + (MF')^2 - 4a^2)^2 = 4(MF)^2(MF')^2.$$

Question 5. Soit $M = (x, y)$. On a

$$(MF)^2 = (x - c)^2 + y^2, \quad (MF')^2 = (x + c)^2 + y^2.$$

Ainsi,

$$(MF)^2 + (MF')^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2).$$

De plus,

$$\begin{aligned} (MF)^2(MF')^2 &= ((x - c)^2 + y^2)((x + c)^2 + y^2) \\ &= (x^2 + y^2 + c^2 - 2cx)(x^2 + y^2 + c^2 + 2cx) \\ &= (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2. \end{aligned}$$

La relation obtenue à la question précédente devient donc

$$(2(x^2 + y^2 + c^2) - 4a^2)^2 = 4((x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2).$$

Après division par 4,

$$(x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2)^2 = (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2.$$

En développant et en simplifiant, on obtient

$$a^2(x^2 + y^2 + c^2 - a^2) = c^2x^2.$$

Donc

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 - a^2(a^2 - c^2) = 0.$$

Comme $b^2 = a^2 - c^2$, cela donne

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

En divisant par $a^2b^2 > 0$, on obtient l'équation réduite :

$$M \in \mathcal{E} \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

II. Étude d'une fonction

On étudie

$$f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Question 6. La fonction f est continue sur $[0, a]$ et dérivable sur $]0, a[$, et même sur $]0, a[$ avec

$$f'(x) = b \cdot \frac{-2x/a^2}{2\sqrt{1-x^2/a^2}} = -\frac{bx}{a^2\sqrt{1-x^2/a^2}}.$$

Ainsi,

$$f'(0) = 0, \quad \forall x \in]0, a[, \quad f'(x) < 0.$$

La fonction est donc strictement décroissante sur $[0, a]$, avec

$$f(0) = b, \quad f(a) = 0.$$

Le tableau de variations est donc :

| | | |
|---------|-----|--------------|
| x | 0 | a |
| $f'(x)$ | 0 | - |
| $f(x)$ | b | \searrow 0 |

La tangente en $(0, b)$ est horizontale, donc

$$\boxed{y = b.}$$

Quand $x \rightarrow a^-$,

$$f'(x) = -\frac{bx}{a^2\sqrt{1-x^2/a^2}} \rightarrow -\infty.$$

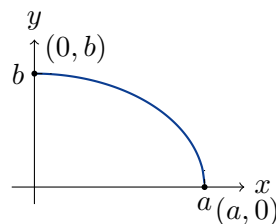
La tangente en $(a, 0)$ est donc verticale :

$$\boxed{x = a.}$$

Question 7. La courbe \mathcal{C}_f est le quart supérieur droit de l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Elle relie $(0, b)$ à $(a, 0)$, est décroissante, possède une tangente horizontale en $(0, b)$ et une tangente verticale en $(a, 0)$.



Question 8. Par symétrie par rapport aux deux axes, l'ellipse complète est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ses sommets principaux sont

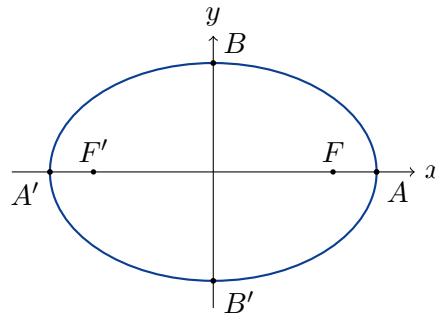
$$A = (a, 0), \quad A' = (-a, 0),$$

et ses sommets secondaires sont

$$B = (0, b), \quad B' = (0, -b).$$

Son grand axe est le segment $[A'A]$, de longueur $2a$, et son petit axe est $[B'B]$, de longueur $2b$. Les foyers sont

$$F = (c, 0), \quad F' = (-c, 0).$$



III. Paramètres de l'ellipse

Question 9. L'excentricité est définie par

$$e = \frac{c}{a}.$$

Comme $0 < c < a$, on a

$$\boxed{0 < e < 1.}$$

Si l'on autorise le cas limite $c = 0$, correspondant au cercle, alors $e = 0$; c'est pourquoi on écrit souvent $e \in [0, 1[$.

On a immédiatement

$$\boxed{c = ae.}$$

Puis

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - a^2e^2} = a\sqrt{1 - e^2}.$$

Donc

$$\boxed{b = a\sqrt{1 - e^2}.}$$

Question 10. Si e est proche de 0, alors $c = ae$ est proche de 0 et

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \approx a.$$

L'ellipse est donc presque un cercle de rayon a .

Si e est proche de 1, alors c est proche de a et

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \approx 0.$$

L'ellipse est alors très aplatie suivant l'axe horizontal; à la limite $e \rightarrow 1^-$, elle se rapproche du segment $[-a, a]$ porté par l'axe des abscisses.

Partie B – Étude du mouvement des planètes massives du système solaire sans négliger les interactions

On dispose de deux vecteurs de fonctions

$$H_t = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{pmatrix}, \quad L_t = \begin{pmatrix} l_1(t) \\ l_2(t) \\ l_3(t) \end{pmatrix},$$

et l'énoncé donne

$$G_t = BL_t, \quad K_t = -BH_t,$$

avec

$$G_t = H'_t, \quad K_t = L'_t.$$

Enfin,

$$F_t = H''_t.$$

Question 11. Puisque $G_t = H'_t$ et $G_t = BL_t$, on a

$$H'_t = BL_t.$$

En dérivant par rapport au temps,

$$H''_t = BL'_t,$$

car B est constante. Or $L'_t = K_t = -BH_t$. Donc

$$H''_t = B(-BH_t) = -B^2H_t.$$

Ainsi, en posant

$$A = -B^2,$$

on obtient

$$F_t = AH_t.$$

Question 12. La matrice A possède, par hypothèse, trois valeurs propres réelles distinctes

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0.$$

Une matrice de taille 3 ayant trois valeurs propres distinctes est diagonalisable. Il existe donc une base de \mathbb{R}^3 formée de vecteurs propres de A . En notant Q la matrice dont les colonnes sont ces vecteurs propres, on a $Q \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ et

$$A = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Question 13. On pose

$$Y_t = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = Q^{-1}H_t.$$

Ainsi

$$H_t = QY_t.$$

En dérivant deux fois,

$$H_t'' = QY_t'',$$

car Q est constante. D'autre part, d'après la question 11,

$$H_t'' = AH_t = Q \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)Q^{-1}QY_t = Q \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)Y_t.$$

Comme Q est inversible,

$$Y_t'' = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)Y_t.$$

Ainsi, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\boxed{y_i''(t) = \lambda_i y_i(t).}$$

Question 14. Comme $\lambda_i < 0$, posons

$$\omega_i = \sqrt{-\lambda_i} > 0.$$

L'équation différentielle

$$y_i'' = \lambda_i y_i$$

s'écrit

$$y_i'' + \omega_i^2 y_i = 0.$$

Son expression générale est donc

$$\boxed{y_i(t) = \alpha_i \cos(\omega_i t) + \beta_i \sin(\omega_i t), \quad \omega_i = \sqrt{-\lambda_i},}$$

où $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ sont des constantes déterminées par les conditions initiales.

Question 15. Les valeurs propres de A sont toutes non nulles, donc A est inversible. Or

$$A = -B^2.$$

Si B n'était pas inversible, alors B^2 ne le serait pas non plus, donc A ne le serait pas. Contradiction. Ainsi

$$\boxed{B \in \operatorname{GL}_3(\mathbb{R}).}$$

Comme $H_t = QY_t$, on a directement

$$\boxed{H_t = QY_t.}$$

En coordonnées, si $Q = (q_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$,

$$\boxed{\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad h_i(t) = q_{i1}y_1(t) + q_{i2}y_2(t) + q_{i3}y_3(t).}$$

De plus,

$$H_t' = BL_t.$$

Comme B est inversible,

$$L_t = B^{-1}H_t' = B^{-1}QY_t'.$$

Donc

$$\boxed{L_t = B^{-1}QY_t'.}$$

En coordonnées, si $B^{-1}Q = (r_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$,

$$\boxed{\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad l_i(t) = r_{i1}y_1'(t) + r_{i2}y_2'(t) + r_{i3}y_3'(t).}$$

En utilisant la question 14, les dérivées y_i' s'expriment explicitement par

$$y_i'(t) = -\alpha_i \omega_i \sin(\omega_i t) + \beta_i \omega_i \cos(\omega_i t).$$

Partie C – Méthode de Le Verrier pour déterminer les valeurs propres

I. Résolution des équations

Question 16. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Alors

$$\operatorname{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^3 (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} b_{ji}.$$

En échangeant les deux sommations,

$$\operatorname{Tr}(AB) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^3 (BA)_{jj} = \operatorname{Tr}(BA).$$

Donc

$$\boxed{\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA).}$$

Si deux matrices A et C sont semblables, il existe $P \in \operatorname{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que

$$C = P^{-1}AP.$$

Alors

$$\operatorname{Tr}(C) = \operatorname{Tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{Tr}(APP^{-1}) = \operatorname{Tr}(A).$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{deux matrices semblables ont même trace.}}$$

Question 17. On suppose

$$A = Q \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) Q^{-1}.$$

Alors, pour tout entier $k \geq 1$,

$$A^k = Q \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k) Q^{-1}.$$

Par invariance de la trace par similitude,

$$\operatorname{Tr}(A^k) = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \lambda_3^k.$$

Ainsi,

$$\boxed{\operatorname{Tr}(A) = S_1, \quad \operatorname{Tr}(A^2) = S_2, \quad \operatorname{Tr}(A^3) = S_3.}$$

Question 18. Le polynôme caractéristique est

$$P_A(X) = \det(XI_3 - A) = \prod_{i=1}^3 (X - \lambda_i).$$

Donc

$$P_A(X) = X^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)X^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)X - \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Comme

$$P_A(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3,$$

on obtient

$$\boxed{\alpha_3 = 1,}$$

$$\boxed{\alpha_2 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3),}$$

$$\boxed{\alpha_1 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3,}$$

et

$$\boxed{\alpha_0 = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3.}$$

Question 19. Par définition,

$$S_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3.$$

Donc

$$\alpha_2 = -S_1.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} S_1^2 &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 \\ &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) \\ &= S_2 + 2\alpha_1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\alpha_1 = \frac{S_1^2 - S_2}{2}.$$

L'énoncé admet enfin

$$\alpha_0 = \frac{3S_1S_2 - S_1^3 - 2S_3}{6}.$$

Cette formule est l'identité de Newton correspondant au produit $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

II. Étude d'un cas particulier

On considère

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 11 & 13 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad R(X) = X^3 + X^2 - 14X - 24.$$

Question 20. Sur \mathbb{C} , tout polynôme est scindé. Le polynôme caractéristique de A est donc scindé dans $\mathbb{C}[X]$, et toute matrice complexe dont le polynôme caractéristique est scindé est trigonalisable. Il existe donc une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et une matrice $Q \in \text{GL}_3(\mathbb{C})$ telles que

$$A = QTQ^{-1}.$$

Les relations de la question 19 restent valables sur \mathbb{C} . En effet, les preuves reposent uniquement sur des identités algébriques, la trace, la similitude et les identités entre coefficients du polynôme caractéristique ; elles ne dépendent pas du fait que les scalaires soient réels ou complexes.

Question 21. On calcule d'abord

$$\text{Tr}(A) = \frac{1}{2}(-4 + 1 + 1) = -1.$$

Donc

$$S_1 = \text{Tr}(A) = -1.$$

Un calcul direct donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{11}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & \frac{25}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{25}{2} \end{pmatrix},$$

donc

$$\text{Tr}(A^2) = 4 + \frac{25}{2} + \frac{25}{2} = 29.$$

Ainsi

$$S_2 = 29.$$

De même,

$$A^3 = \begin{pmatrix} -8 & \frac{253}{8} & \frac{247}{8} \\ 0 & \frac{37}{2} & \frac{91}{2} \\ 0 & \frac{91}{2} & \frac{37}{2} \end{pmatrix},$$

donc

$$\text{Tr}(A^3) = -8 + \frac{37}{2} + \frac{37}{2} = 29.$$

Ainsi

$$S_3 = 29.$$

Les formules de la question 19 donnent alors

$$\alpha_2 = -S_1 = 1,$$

$$\alpha_1 = \frac{S_1^2 - S_2}{2} = \frac{1 - 29}{2} = -14,$$

et

$$\alpha_0 = \frac{3S_1S_2 - S_1^3 - 2S_3}{6} = \frac{3(-1)29 - (-1)^3 - 2 \cdot 29}{6} = \frac{-87 + 1 - 58}{6} = -24.$$

Comme $\alpha_3 = 1$, on obtient

$$\boxed{P_A(X) = X^3 + X^2 - 14X - 24 = R(X)}.$$

Question 22. On factorise R . On teste les racines rationnelles évidentes :

$$R(4) = 64 + 16 - 56 - 24 = 0,$$

$$R(-2) = -8 + 4 + 28 - 24 = 0,$$

$$R(-3) = -27 + 9 + 42 - 24 = 0.$$

Ainsi

$$R(X) = (X - 4)(X + 2)(X + 3).$$

Les valeurs propres de A sont donc

$$\boxed{-3, -2, 4}.$$

Plus proprement,

$$\boxed{\text{Sp}(A) = \{-3, -2, 4\}}.$$

Question 23. Cherchons des vecteurs propres associés.

Pour $\lambda = -2$, on résout $(A + 2I_3)X = 0$. On obtient par exemple

$$X_{-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda = -3$, on résout $(A + 3I_3)X = 0$. Un vecteur propre est

$$X_{-3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda = 4$, on résout $(A - 4I_3)X = 0$. Un vecteur propre est

$$X_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Prenons donc

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

dont les colonnes sont respectivement associées à -2 , -3 et 4 . Son déterminant vaut

$$\det(Q) = -2 \neq 0,$$

donc $Q \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$. On a alors

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Partie D – Perturbation sur une matrice d'ordre 3

On fixe trois réels

$$a < b < c,$$

et un vecteur

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

avec u, v, w non nuls. On pose

$$T = UU^T, \quad D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad D(t) = D + tT,$$

où $t \in \mathbb{R}^*$ est fixé. L'équation étudiée est

$$(E_t) \quad \frac{u^2}{\lambda - a} + \frac{v^2}{\lambda - b} + \frac{w^2}{\lambda - c} = \frac{1}{t}.$$

I. Solutions et spectre

Question 24. Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{a, b, c\}$ une valeur propre de $D(t)$, et soit $X \neq 0$ un vecteur propre associé. Comme $\lambda \notin \{a, b, c\}$,

$$\lambda I_3 - D = \begin{pmatrix} \lambda - a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - c \end{pmatrix}$$

est inversible. Donc

$$\boxed{\lambda I_3 - D \in \text{GL}_3(\mathbb{R})}.$$

L'égalité $D(t)X = \lambda X$ donne

$$(D + tUU^T)X = \lambda X.$$

Donc

$$(\lambda I_3 - D)X = tUU^T X = tU(U^T X).$$

En multipliant par $(\lambda I_3 - D)^{-1}$,

$$X = t(\lambda I_3 - D)^{-1}U(U^T X).$$

En multipliant à gauche par U^T ,

$$\boxed{U^T X = tU^T(\lambda I_3 - D)^{-1}U U^T X}.$$

Question 25. Montrons d'abord que $U^T X \neq 0$. Si $U^T X = 0$, alors la relation

$$(\lambda I_3 - D)X = tU(U^T X)$$

donne

$$(\lambda I_3 - D)X = 0.$$

Comme $\lambda I_3 - D$ est inversible, on obtient $X = 0$, contradiction avec le fait que X est un vecteur propre.

On peut donc diviser la relation de la question précédente par $U^T X$, et l'on obtient

$$\boxed{U^T(\lambda I_3 - D)^{-1}U = \frac{1}{t}}.$$

Question 26. Or

$$(\lambda I_3 - D)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda-c} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$U^T(\lambda I_3 - D)^{-1}U = \frac{u^2}{\lambda-a} + \frac{v^2}{\lambda-b} + \frac{w^2}{\lambda-c}.$$

La relation de la question 25 devient exactement

$$\boxed{\frac{u^2}{\lambda-a} + \frac{v^2}{\lambda-b} + \frac{w^2}{\lambda-c} = \frac{1}{t}.}$$

Ainsi λ est solution de (E_t) .

Question 27. On considère

$$F : \mathbb{R} \setminus \{a, b, c\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(\lambda) = \frac{u^2}{\lambda-a} + \frac{v^2}{\lambda-b} + \frac{w^2}{\lambda-c}.$$

Sur chacun des intervalles de définition,

$$F'(\lambda) = -\frac{u^2}{(\lambda-a)^2} - \frac{v^2}{(\lambda-b)^2} - \frac{w^2}{(\lambda-c)^2} < 0.$$

Donc F est strictement décroissante sur chacun des quatre intervalles

$$]-\infty, a[, \quad]a, b[, \quad]b, c[, \quad]c, +\infty[.$$

Les limites aux bornes sont :

| intervalle | limite à gauche | limite à droite |
|----------------|-----------------|-----------------|
| $]-\infty, a[$ | 0^- | $-\infty$ |
| $]a, b[$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $]b, c[$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $]c, +\infty[$ | $+\infty$ | 0^+ |

En particulier, par stricte décroissance et continuité sur $]a, b[$, il existe un unique zéro $p_1 \in]a, b[$. De même, il existe un unique zéro $p_2 \in]b, c[$. Donc

$$\boxed{a < p_1 < b < p_2 < c, \quad F(p_1) = F(p_2) = 0.}$$

Question 28. L'équation (E_t) est

$$F(\lambda) = \frac{1}{t}.$$

Cas $t > 0$. Alors $1/t > 0$. D'après le tableau de variations :

- il n'y a aucune solution dans $]-\infty, a[$, car $F < 0$ sur cet intervalle ;
- il y a une unique solution dans $]a, b[$, et plus précisément dans $]a, p_1[$;
- il y a une unique solution dans $]b, c[$, et plus précisément dans $]b, p_2[$;
- il y a une unique solution dans $]c, +\infty[$.

Ainsi, pour $t > 0$,

$$\boxed{a < \lambda_1(t) < p_1 < b < \lambda_2(t) < p_2 < c < \lambda_3(t).}$$

Cas $t < 0$. Alors $1/t < 0$. D'après le tableau de variations :

- il y a une unique solution dans $] -\infty, a[$;
- il y a une unique solution dans $]a, b[$, et plus précisément dans $]p_1, b[$;
- il y a une unique solution dans $]b, c[$, et plus précisément dans $]p_2, c[$;
- il n'y a aucune solution dans $]c, +\infty[$, car $F > 0$ sur cet intervalle.

Ainsi, pour $t < 0$,

$$\lambda_1(t) < a < p_1 < \lambda_2(t) < b < p_2 < \lambda_3(t) < c.$$

Dans les deux cas, l'équation (E_t) admet exactement trois solutions réelles distinctes, que l'on note

$$\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \lambda_3(t).$$

Question 29. On a déjà montré aux questions 24 à 26 que toute valeur propre de $D(t)$ distincte de a, b, c est solution de (E_t) .

Il reste deux points à vérifier.

1. Les nombres a, b, c ne sont pas valeurs propres de $D(t)$. Montrons-le pour a , les deux autres cas étant analogues. Supposons que a soit valeur propre et soit $X \neq 0$ tel que $D(t)X = aX$. Alors

$$(aI_3 - D)X = tU(U^T X).$$

Si $U^T X = 0$, alors $(aI_3 - D)X = 0$, donc X est proportionnel à $(1, 0, 0)^T$, puis $U^T X = ux_1 = 0$. Comme $u \neq 0$, on a $x_1 = 0$, donc $X = 0$, contradiction.

Si $U^T X \neq 0$, la première coordonnée de l'égalité

$$(aI_3 - D)X = tU(U^T X)$$

donne

$$0 = tu(U^T X),$$

ce qui est impossible puisque $t \neq 0$, $u \neq 0$ et $U^T X \neq 0$. Donc a n'est pas valeur propre. Même raisonnement pour b et c .

2. Toute solution de (E_t) est valeur propre. Soit λ une solution de (E_t) . Alors $\lambda \notin \{a, b, c\}$, et l'on pose

$$X = (\lambda I_3 - D)^{-1}U.$$

Ce vecteur est non nul. De plus,

$$U^T X = U^T (\lambda I_3 - D)^{-1}U = F(\lambda) = \frac{1}{t}.$$

Donc

$$tU(U^T X) = tU \cdot \frac{1}{t} = U.$$

Or

$$(\lambda I_3 - D)X = U.$$

Ainsi

$$(\lambda I_3 - D)X = tU(U^T X),$$

c'est-à-dire

$$D(t)X = \lambda X.$$

Donc λ est valeur propre de $D(t)$.

On a donc prouvé

$$\text{Sp}(D(t)) = \{\text{solutions de } (E_t)\}.$$

II. Les limites

On note g_1, g_2, g_3, g_4 les réciproques des restrictions de F respectivement à

$$]-\infty, a[, \quad]a, b[, \quad]b, c[, \quad]c, +\infty[.$$

Question 30. D'après la question 27, F est continue et strictement décroissante sur chacun des quatre intervalles. Les images sont :

$$F(]-\infty, a[) =]-\infty, 0[,$$

$$F(]a, b[) = \mathbb{R},$$

$$F(]b, c[) = \mathbb{R},$$

$$F(]c, +\infty[) =]0, +\infty[.$$

Ainsi les réciproques existent et

$$g_1 :]-\infty, 0[\rightarrow]-\infty, a[,$$

$$g_2 : \mathbb{R} \rightarrow]a, b[,$$

$$g_3 : \mathbb{R} \rightarrow]b, c[,$$

$$g_4 :]0, +\infty[\rightarrow]c, +\infty[.$$

Le nombre $g_2(0)$ est l'unique antécédent de 0 par F sur $]a, b[$. Par définition de p_1 ,

$$\boxed{g_2(0) = p_1.}$$

Comme $F(\lambda) \rightarrow +\infty$ lorsque $\lambda \rightarrow a^+$ sur $]a, b[$, on a

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g_2(x) = a.}$$

Comme $F(\lambda) \rightarrow -\infty$ lorsque $\lambda \rightarrow b^-$ sur $]a, b[$, on a

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} g_2(x) = b.}$$

Question 31. On résout

$$F(\lambda) = \frac{1}{t}.$$

Cas $t > 0$. Alors $1/t > 0$, et les trois solutions sont situées dans

$$]a, b[, \quad]b, c[, \quad]c, +\infty[.$$

Donc

$$\boxed{\lambda_1(t) = g_2\left(\frac{1}{t}\right), \quad \lambda_2(t) = g_3\left(\frac{1}{t}\right), \quad \lambda_3(t) = g_4\left(\frac{1}{t}\right).}$$

Cas $t < 0$. Alors $1/t < 0$, et les trois solutions sont situées dans

$$]-\infty, a[, \quad]a, b[, \quad]b, c[.$$

Donc

$$\boxed{\lambda_1(t) = g_1\left(\frac{1}{t}\right), \quad \lambda_2(t) = g_2\left(\frac{1}{t}\right), \quad \lambda_3(t) = g_3\left(\frac{1}{t}\right).}$$

Question 32. Étudions les limites lorsque $t \rightarrow 0$. Si $t \rightarrow 0^+$, alors $1/t \rightarrow +\infty$. D'après les limites des réciproques,

$$\lambda_1(t) = g_2(1/t) \rightarrow a,$$

$$\lambda_2(t) = g_3(1/t) \rightarrow b,$$

$$\lambda_3(t) = g_4(1/t) \rightarrow c.$$

Si $t \rightarrow 0^-$, alors $1/t \rightarrow -\infty$. De même,

$$\lambda_1(t) = g_1(1/t) \rightarrow a,$$

$$\lambda_2(t) = g_2(1/t) \rightarrow b,$$

$$\lambda_3(t) = g_3(1/t) \rightarrow c.$$

Ainsi les prolongements continus sont obtenus en posant

$$\boxed{\lambda_1(0) = a, \quad \lambda_2(0) = b, \quad \lambda_3(0) = c.}$$

Avec ces valeurs, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ se prolongent en fonctions continues sur \mathbb{R} .

Question 33. Pour $t \neq 0$, la fonction λ_1 est dérivable comme composée d'une réciproque dérivable et de $t \mapsto 1/t$. En effet, $F'(\lambda) \neq 0$ sur son domaine.

Il reste à étudier la dérivabilité en 0. On sait que

$$\lambda_1(0) = a.$$

Posons

$$\delta(t) = \lambda_1(t) - a.$$

Alors $\delta(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0$, et $\delta(t)$ a le même signe que t d'après la localisation des solutions. L'équation

$$F(\lambda_1(t)) = \frac{1}{t}$$

s'écrit

$$\frac{u^2}{\delta(t)} + \frac{v^2}{a + \delta(t) - b} + \frac{w^2}{a + \delta(t) - c} = \frac{1}{t}.$$

Posons

$$R_a(\delta) = \frac{v^2}{a + \delta - b} + \frac{w^2}{a + \delta - c}.$$

Cette fonction reste bornée lorsque $\delta \rightarrow 0$, car $a - b \neq 0$ et $a - c \neq 0$. L'équation devient

$$\frac{u^2}{\delta(t)} + R_a(\delta(t)) = \frac{1}{t}.$$

En multipliant par $\delta(t)$,

$$u^2 + \delta(t)R_a(\delta(t)) = \frac{\delta(t)}{t}.$$

Comme $\delta(t) \rightarrow 0$ et $R_a(\delta(t))$ reste bornée,

$$\delta(t)R_a(\delta(t)) \rightarrow 0.$$

Ainsi

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda_1(t) - a}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\delta(t)}{t} = u^2.$$

Donc

$$\boxed{\lambda_1'(0) = u^2.}$$

Le même raisonnement au voisinage de b et de c donne, sans nouvelle justification détaillée,

$$\boxed{\lambda_2'(0) = v^2, \quad \lambda_3'(0) = w^2.}$$

Question 34. Lorsque $t \rightarrow +\infty$, on a $1/t \rightarrow 0^+$. En utilisant les expressions de la question 31,

$$\lambda_1(t) = g_2(1/t) \longrightarrow g_2(0) = p_1,$$

$$\lambda_2(t) = g_3(1/t) \longrightarrow g_3(0) = p_2,$$

et

$$\lambda_3(t) = g_4(1/t) \longrightarrow +\infty,$$

car $F(\lambda) \rightarrow 0^+$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$ sur $]c, +\infty[$. Donc

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda_1(t) = p_1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda_2(t) = p_2, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda_3(t) = +\infty.}$$

Lorsque $t \rightarrow -\infty$, on a $1/t \rightarrow 0^-$. Alors

$$\lambda_1(t) = g_1(1/t) \longrightarrow -\infty,$$

car $F(\lambda) \rightarrow 0^-$ lorsque $\lambda \rightarrow -\infty$ sur $] -\infty, a[$, tandis que

$$\lambda_2(t) = g_2(1/t) \longrightarrow g_2(0) = p_1,$$

et

$$\lambda_3(t) = g_3(1/t) \longrightarrow g_3(0) = p_2.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow -\infty} \lambda_1(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \lambda_2(t) = p_1, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \lambda_3(t) = p_2.}$$

Commentaire. Pour $t = 0$, la matrice $D(t)$ est simplement D , dont les valeurs propres sont a, b, c . Pour t petit, les valeurs propres de $D(t)$ sont donc des perturbations continues, et même dérivables en 0, de a, b, c :

$$\lambda_1(t) = a + u^2t + o(t), \quad \lambda_2(t) = b + v^2t + o(t), \quad \lambda_3(t) = c + w^2t + o(t).$$

En revanche, lorsque $|t|$ devient grand, une valeur propre s'échappe vers l'infini, tandis que les deux autres convergent vers les zéros p_1 et p_2 de F , situés entre les valeurs propres initiales :

$$a < p_1 < b < p_2 < c.$$

On observe donc un phénomène d'interlacement typique des perturbations de rang un.