

## Correction complète

Centrale-Supélec – PC – Mathématiques 2 – 2026

Excellence Maths

### Partie A – Construction d’une fonction test

On considère

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

**Q1.** Sur  $] -\infty, 0[$ , la fonction  $\varphi$  est nulle, donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Sur  $]0, +\infty[$ , elle est la composée de deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  :  $x \mapsto -1/x$  et  $u \mapsto e^u$ . Ainsi  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

**Q2.** On raisonne par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 0$ , on prend  $P_0 = 1$  et l’égalité est immédiate sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Supposons qu’il existe  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  tel que, pour tout  $x > 0$ ,

$$\varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \varphi^{(n+1)}(x) &= \left[ -\frac{1}{x^2} P_n\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} P_n\left(\frac{1}{x}\right) \right] e^{-1/x} \\ &= \left[ X^2(P_n(X) - P_n'(X)) \right]_{X=1/x} e^{-1/x}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de poser

$$P_{n+1}(X) = X^2(P_n(X) - P_n'(X)),$$

qui est bien un polynôme réel. La propriété est démontrée pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Q3.** Pour tout polynôme  $P$ , on a

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} P(y)e^{-y} = 0.$$

En posant  $y = 1/x$ , on obtient donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} = 0.$$

Ainsi, toutes les dérivées obtenues sur  $]0, +\infty[$  admettent en 0 une limite à droite nulle. À gauche de 0, la fonction est identiquement nulle, donc toutes ses dérivées sont nulles. Par recollement,  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi^{(n)}(0) = 0$ .

**Q4.** Pour  $a < b$ , on définit

$$\psi_{a,b}(x) = \varphi(x-a)\varphi(b-x).$$

C’est un produit de fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , donc  $\psi_{a,b} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ . Si  $x \in ]a, b[$ , alors  $x - a > 0$  et  $b - x > 0$ , donc  $\psi_{a,b}(x) > 0$ . Si  $x \leq a$  ou  $x \geq b$ , l’un des deux facteurs est nul, donc

$$\psi_{a,b}(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus ]a, b[).$$

**Q5.** Posons

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{-1,1}(u) \, du.$$

La fonction  $\psi_{-1,1}$  est continue, positive sur  $] -1, 1[$  et nulle hors de  $] -1, 1[$ ; ainsi  $0 < I < +\infty$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , la fonction

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon I} \psi_{-1,1}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

est donc bien définie. Elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , positive, et nulle dès que  $|x| \geq \varepsilon$ . Elle est donc à support compact, et

$$\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

**Q6.** Par changement de variable  $u = x/\varepsilon$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x) \, dx = \frac{1}{\varepsilon I} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{-1,1}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \, dx = \frac{1}{I} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{-1,1}(u) \, du = 1.$$

**Q7.** Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

(a) Comme  $\rho_\varepsilon \geq 0$ ,  $\int \rho_\varepsilon = 1$  et  $\rho_\varepsilon$  est nulle hors de  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ ,

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x) g(x) \, dx - g(0) \right| \leq \sup_{|x| \leq \varepsilon} |g(x) - g(0)|.$$

La continuité de  $g$  en 0 donne

$$\boxed{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x) g(x) \, dx = g(0).}$$

(b) En posant  $y = x - a$ , on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x - a) g(x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(y) g(a + y) \, dy.$$

La fonction  $y \mapsto g(a + y)$  est continue en 0, donc le résultat précédent donne

$$\boxed{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x - a) g(x) \, dx = g(a).}$$

## Partie B – Distribution sur $\mathbb{R}$

On rappelle qu'une distribution est une forme linéaire  $T$  sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que, pour tout segment  $K \subset \mathbb{R}$ , il existe  $C_K > 0$  et  $N_K \in \mathbb{N}$  vérifiant

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(K), \quad |T(\phi)| \leq C_K \max_{0 \leq j \leq N_K} \|\phi^{(j)}\|_\infty.$$

**Q8.** Soient  $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . La forme  $\lambda T + \mu S$  est clairement linéaire. Soit  $K$  un segment. Il existe  $C_T, C_S > 0$  et  $N_T, N_S \in \mathbb{N}$  tels que, pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(K)$ ,

$$|T(\phi)| \leq C_T \max_{0 \leq j \leq N_T} \|\phi^{(j)}\|_\infty, \quad |S(\phi)| \leq C_S \max_{0 \leq j \leq N_S} \|\phi^{(j)}\|_\infty.$$

En posant  $N = \max(N_T, N_S)$ , on a

$$|\lambda T(\phi) + \mu S(\phi)| \leq (|\lambda|C_T + |\mu|C_S) \max_{0 \leq j \leq N} \|\phi^{(j)}\|_\infty.$$

Donc  $\lambda T + \mu S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Ainsi  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  est un espace vectoriel.

**Q9.** Pour  $a \in \mathbb{R}$ , l'application

$$\delta_a : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto \phi(a)$$

est linéaire. De plus, pour tout segment  $K$  et tout  $\phi \in \mathcal{D}(K)$ ,

$$|\delta_a(\phi)| = |\phi(a)| \leq \|\phi\|_\infty.$$

On peut donc prendre  $C_K = 1$  et  $N_K = 0$ . Ainsi

$$\boxed{\delta_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).}$$

**Q10.** Soit  $f$  continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . Pour  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , la fonction  $f\phi$  est continue par morceaux et à support compact, donc intégrable. L'application

$$T_f(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(t) dt$$

est donc bien définie et linéaire.

Soit  $K = [\alpha, \beta]$  un segment. Comme  $f$  est continue par morceaux, elle est bornée sur  $K$  : il existe  $M_K \geq 0$  tel que  $|f| \leq M_K$  sur  $K$ . Pour  $\phi \in \mathcal{D}(K)$ ,

$$|T_f(\phi)| \leq \int_K |f(t)||\phi(t)| dt \leq M_K(\beta - \alpha) \|\phi\|_\infty.$$

En ajustant éventuellement la constante si  $K$  est réduit à un point, on obtient une constante  $C_K > 0$  telle que

$$|T_f(\phi)| \leq C_K \|\phi\|_\infty.$$

Donc  $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

**Q11.** Supposons  $T_{f_1} = T_{f_2}$  avec  $f_1, f_2$  continues. Posons  $h = f_1 - f_2$ . Alors  $h$  est continue et

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\phi(t) dt = 0.$$

Si  $h(a) \neq 0$  pour un certain  $a$ , par continuité il existe un intervalle  $]a - \eta, a + \eta[$  sur lequel  $h$  garde le signe de  $h(a)$  et ne s'annule pas. En prenant la fonction test positive  $\psi_{a-\eta, a+\eta}$  construite à la question Q4, on obtient

$$\int h(t)\psi_{a-\eta, a+\eta}(t) dt \neq 0,$$

contradiction. Donc  $h = 0$ , c'est-à-dire

$$\boxed{f_1 = f_2.}$$

**Q12.** Soit  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  et

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ \phi'(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Si  $x \neq 0$ , par changement de variable dans l'intégrale,

$$\phi(x) - \phi(0) = \int_0^x \phi'(u) du = x \int_0^1 \phi'(tx) dt.$$

Donc

$$\psi(x) = \int_0^1 \phi'(tx) dt.$$

Pour  $x = 0$ , le membre de droite vaut  $\phi'(0)$ , donc l'égalité est encore vraie. Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\boxed{\psi(x) = \int_0^1 \phi'(tx) dt.}$$

- (b) La fonction  $(t, x) \mapsto \phi'(tx)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0, 1] \times \mathbb{R}$ . On peut dériver sous le signe intégral et, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\psi^{(k)}(x) = \int_0^1 t^k \phi^{(k+1)}(tx) dt.$$

Donc

$$\boxed{\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}).}$$

**Q13.**

- (a) Soit  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Il existe  $A > 0$  tel que  $\phi(x) = 0$  pour  $|x| > A$ . Pour  $0 < \varepsilon < A$ , on écrit, avec la fonction  $\psi$  de Q12,

$$\frac{\phi(x)}{x} = \frac{\phi(0)}{x} + \psi(x) \quad (x \neq 0).$$

Alors

$$\int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{\phi(0)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^A \frac{\phi(0)}{x} dx = 0.$$

Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx = \int_{[-A, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, A]} \psi(x) dx.$$

Comme  $\psi$  est continue, le membre de droite admet une limite lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , égale à

$$\int_{-A}^A \psi(x) dx.$$

La limite définissant  $V(\phi)$  existe donc.

- (b) La linéarité de  $V$  est immédiate. Montrons la majoration de distribution. Soit  $K$  un segment et choisissons  $A_K \geq 1$  tel que  $K \subset [-A_K, A_K]$ . Pour  $\phi \in \mathcal{D}(K)$ , avec la fonction  $\psi$  ci-dessus,

$$V(\phi) = \int_{-A_K}^{A_K} \psi(x) dx.$$

Or, d'après Q12,

$$|\psi(x)| \leq \int_0^1 |\phi'(tx)| dt \leq \|\phi'\|_\infty.$$

Donc

$$|V(\phi)| \leq 2A_K \|\phi'\|_\infty \leq 2A_K \max(\|\phi\|_\infty, \|\phi'\|_\infty).$$

On peut prendre  $C_K = 2A_K$  et  $N_K = 1$ . Ainsi

$$\boxed{V \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).}$$

## Partie C – Dérivation d'une distribution

Pour  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , on définit

$$T'(\phi) = -T(\phi') \quad (\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})).$$

- Q14.** La forme  $T'$  est linéaire. Soit  $K$  un segment. Comme  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , il existe  $C_K > 0$  et  $N_K \in \mathbb{N}$  tels que, pour tout  $\theta \in \mathcal{D}(K)$ ,

$$|T(\theta)| \leq C_K \max_{0 \leq j \leq N_K} \|\theta^{(j)}\|_\infty.$$

Si  $\phi \in \mathcal{D}(K)$ , alors  $\phi' \in \mathcal{D}(K)$ , donc

$$|T'(\phi)| = |T(\phi')| \leq C_K \max_{0 \leq j \leq N_K} \|(\phi')^{(j)}\|_\infty \leq C_K \max_{0 \leq j \leq N_K+1} \|\phi^{(j)}\|_\infty.$$

Ainsi

$$\boxed{T' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).}$$

**Q15.** Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  et  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Comme  $\phi$  est à support compact, les termes de bord sont nuls. Une intégration par parties donne

$$T'_f(\phi) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi'(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\phi(t) dt = T_{f'}(\phi).$$

Donc

$$\boxed{T'_f = T_{f'}}.$$

**Q16.** Soit  $f(x) = |x|$ .

(a) La dérivée à gauche en 0 vaut  $-1$  et la dérivée à droite en 0 vaut  $1$ . Donc  $f$  n'est pas dérivable en 0; elle n'est donc pas dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

(b) Pour  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,

$$T'_f(\phi) = - \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\phi'(x) dx.$$

En séparant les intégrales sur  $] -\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ ,

$$\begin{aligned} T'_f(\phi) &= \int_{-\infty}^0 x\phi'(x) dx - \int_0^{+\infty} x\phi'(x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^0 \phi(x) dx + \int_0^{+\infty} \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Ainsi  $T'_f = T_{\text{sgn}}$ , où l'on peut prendre

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

la valeur en 0 étant sans importance pour la distribution associée. Donc

$$\boxed{T'_{|x|} = T_{\text{sgn}} = T_{2H-1}}.$$

**Q17.** La fonction

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est continue sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$ , avec une discontinuité de saut en 0. Elle est donc continue par morceaux. Pour  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,

$$T'_H(\phi) = - \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\phi'(x) dx = - \int_0^{+\infty} \phi'(x) dx = \phi(0) = \delta_0(\phi).$$

Donc

$$\boxed{T'_H = \delta_0}.$$

**Q18.** Soit  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  tel que  $T' = 0$ .

(a) Pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,

$$0 = T'(\phi) = -T(\phi'),$$

donc

$$\boxed{T(\phi') = 0}.$$

(b) Soit  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt = 0$ . Posons

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt.$$

Comme  $\phi$  est à support compact et d'intégrale nulle, la fonction  $\psi$  est nulle en dehors d'un segment suffisamment grand. Elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et  $\psi' = \phi$ . Donc  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  et, d'après (a),

$$T(\phi) = T(\psi') = 0.$$

(c) La fonction  $\rho_1$  construite dans la partie A appartient à  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  et vérifie, d'après Q6,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_1(t) dt = 1.$$

On peut donc prendre

$$\boxed{\phi_0 = \rho_1.}$$

(d) Soit  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  et posons

$$\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt.$$

Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\phi - \alpha\phi_0)(t) dt = 0.$$

D'après (b),  $T(\phi - \alpha\phi_0) = 0$ , d'où

$$\boxed{T(\phi) = T(\phi_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt.}$$

(e) Posons  $c = T(\phi_0)$  et soit  $h$  la fonction constante égale à  $c$ . Alors, pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,

$$T_h(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} c\phi(t) dt = c \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt = T(\phi).$$

Donc

$$\boxed{T = T_h \text{ avec } h \text{ constante.}}$$

**Q19.** Soit  $f$  continue telle que  $T'_f = 0$ . D'après Q18, il existe une fonction constante  $h$  telle que  $T_f = T_h$ . Comme  $f$  et  $h$  sont continues, Q11 donne  $f = h$ . Réciproquement, si  $f$  est constante, alors  $T'_f = T'_{f'} = 0$ . Ainsi les fonctions continues cherchées sont exactement les fonctions constantes.

$$\boxed{T'_f = 0 \iff f \text{ est constante.}}$$

**Q20.** Soit  $f$  continue telle que  $T''_f = 0$ . Alors la distribution  $T'_f$  a une dérivée nulle. D'après Q18, il existe une constante  $a \in \mathbb{R}$  telle que

$$T'_f = T_a,$$

où  $T_a$  désigne la distribution associée à la fonction constante  $x \mapsto a$ . Or, pour la fonction  $x \mapsto ax$ , on a, par Q15,

$$T'_{x \mapsto ax} = T_a.$$

Donc

$$(T_f - T_{x \mapsto ax})' = 0.$$

D'après Q18, il existe une constante  $b \in \mathbb{R}$  telle que

$$T_f - T_{x \mapsto ax} = T_b.$$

Ainsi

$$T_f = T_{x \rightarrow ax+b}.$$

Comme les deux fonctions sont continues, Q11 donne

$$f(x) = ax + b \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Réciproquement, toute fonction affine a une dérivée seconde distributionnelle nulle. Donc

$$\boxed{T_f'' = 0 \iff f \text{ est affine.}}$$

**Q21.** Si  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , une primitive est donnée par

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt.$$

Le théorème fondamental de l'analyse donne  $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  et

$$\boxed{G' = g.}$$

**Q22.** Puisque  $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  et  $G' = g$ , Q15 donne

$$T_G' = T_g.$$

L'hypothèse étant  $T_f' = T_g$ , on obtient

$$\boxed{(T_f - T_G)' = 0.}$$

**Q23.** D'après Q18 appliquée à  $T_f - T_G$ , il existe une constante  $c \in \mathbb{R}$  telle que

$$T_f - T_G = T_c.$$

Autrement dit

$$T_f = T_{G+c}.$$

Les fonctions  $f$  et  $G + c$  sont continues, donc Q11 donne

$$f = G + c.$$

Ainsi  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  et

$$\boxed{f' = G' = g.}$$

## Partie D – Suite de distributions

On dit que  $T_n \rightarrow T$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  si, pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(\phi) = T(\phi).$$

**Q24.** Soit  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Alors  $\phi' \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , donc

$$T_n'(\phi) = -T_n(\phi') \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -T(\phi') = T'(\phi).$$

Ainsi

$$\boxed{T_n' \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}} T'}.$$

**Q25.** On peut prendre

$$f_n(x) = \sin(nx).$$

La suite  $(f_n)$  ne converge pas simplement sur  $\mathbb{R}$ , par exemple en  $x = \pi/2$ . En revanche, pour  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , une intégration par parties donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(nx)\phi(x) dx = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(nx)\phi'(x) dx,$$

les termes de bord étant nuls. Donc

$$|T_{f_n}(\phi)| \leq \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi'(x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi

$$\boxed{T_{\sin(nx)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}} 0,}$$

alors même que  $(\sin(nx))$  ne converge pas simplement sur  $\mathbb{R}$ .

**Q26.** Supposons  $f_n \rightarrow f$  uniformément sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  et soit  $A > 0$  tel que  $\phi$  soit nulle hors de  $[-A, A]$ . Alors

$$|T_{f_n}(\phi) - T_f(\phi)| \leq \int_{-A}^A |f_n(x) - f(x)| |\phi(x)| dx \leq 2A \|\phi\|_\infty \|f_n - f\|_\infty.$$

Comme  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ , on obtient

$$\boxed{T_{f_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}} T_f.}$$

**Q27.** Supposons  $f_n \rightarrow f$  en norme 2. Pour  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned} |T_{f_n}(\phi) - T_f(\phi)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f_n(x) - f(x))\phi(x) dx \right| \\ &\leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (f_n(x) - f(x))^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \|f_n - f\|_2 \|\phi\|_2. \end{aligned}$$

Le membre de droite tend vers 0, donc

$$\boxed{T_{f_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}} T_f.}$$

## Partie E – Une application : le théorème d'unicité de Cantor

On suppose que les suites réelles  $(a_n)_{n \geq 1}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$  sont telles que la série trigonométrique

$$\sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

converge pour tout réel  $x$  et soit de somme nulle.

**Q28.**

(a) En prenant  $x = 0$ , la série devient

$$\sum_{n \geq 1} a_n.$$

Elle converge, donc son terme général tend vers 0 :

$$\boxed{a_n \rightarrow 0.}$$

(b) Pour tout  $x \in [0, 2\pi]$ , le terme général de la série numérique

$$\sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

tend vers 0. Or  $a_n \cos(nx) \rightarrow 0$  d'après (a). Donc

$$\boxed{b_n \sin(nx) \rightarrow 0 \quad (x \in [0, 2\pi]).}$$

(c) Supposons que  $(b_n)$  ne tende pas vers 0. Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que l'ensemble

$$\{n \geq 1 \mid |b_n| \geq \varepsilon\}$$

soit infini. On peut donc construire une application strictement croissante

$$\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$$

telle que

$$\boxed{|b_{\varphi(n)}| \geq \varepsilon \quad (n \geq 1).}$$

(d) D'après (b), pour tout  $x \in [0, 2\pi]$ ,

$$b_{\varphi(n)} \sin(\varphi(n)x) \rightarrow 0.$$

Comme  $|b_{\varphi(n)}| \geq \varepsilon$ , on obtient

$$\sin(\varphi(n)x) \rightarrow 0 \quad (x \in [0, 2\pi]).$$

Par convergence dominée, puisque  $0 \leq \sin^2(\varphi(n)x) \leq 1$ ,

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi(n)x) dx \rightarrow 0.}$$

(e) Pourtant, pour tout entier  $m \geq 1$ ,

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(mx) dx = \pi.$$

C'est contradictoire avec (d). Donc  $(b_n)$  converge vers 0. Finalement

$$\boxed{a_n \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad b_n \rightarrow 0.}$$

**Q29.** On suppose ici que  $\sum |a_n|$  et  $\sum |b_n|$  convergent. Alors la série trigonométrique converge normalement, donc uniformément, et l'on peut intégrer terme à terme sur  $[0, 2\pi]$ . Pour  $k \geq 1$ ,

$$0 = \int_0^{2\pi} \left( \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) \cos(kx) dx.$$

Par orthogonalité,

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx = \begin{cases} \pi & \text{si } n = k, \\ 0 & \text{si } n \neq k, \end{cases}$$

et

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(kx) dx = 0.$$

Donc  $0 = \pi a_k$ , d'où  $a_k = 0$ . De même, en multipliant par  $\sin(kx)$ ,

$$0 = \int_0^{2\pi} \left( \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right) \sin(kx) dx = \pi b_k.$$

Ainsi  $b_k = 0$ . Comme  $k$  est arbitraire,

$$\boxed{\forall n \geq 1, a_n = b_n = 0.}$$

**Q30.** D'après Q28, les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  convergent vers 0, donc elles sont bornées. Il existe  $M > 0$  tel que

$$|a_n| \leq M, \quad |b_n| \leq M \quad (n \geq 1).$$

Pour

$$f_n(x) = \frac{a_n}{n^2} \cos(nx) + \frac{b_n}{n^2} \sin(nx),$$

on a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|f_n(x)| \leq \frac{|a_n| + |b_n|}{n^2} \leq \frac{2M}{n^2}.$$

Comme la série  $\sum 1/n^2$  converge, la série  $\sum f_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ . On note

$$\boxed{F(x) = \sum_{n \geq 1} \left( \frac{a_n}{n^2} \cos(nx) + \frac{b_n}{n^2} \sin(nx) \right).}$$

En particulier,  $F$  est continue comme somme uniforme de fonctions continues.

**Q31.** Posons

$$u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

Par hypothèse, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\sum_{n \geq 1} u_n(x) = 0.$$

La fonction  $F$  s'écrit

$$F(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{u_n(x)}{n^2}.$$

Nous allons déterminer sa dérivée seconde généralisée. Le calcul naturel se fait au moyen des différences secondes symétriques : pour  $h \neq 0$ , posons

$$\Delta_h^2 F(x) = \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2}.$$

La série définissant  $F$  étant normalement convergente, on peut calculer cette différence terme à terme.  
Or

$$u_n(x+h) + u_n(x-h) - 2u_n(x) = 2(\cos(nh) - 1)u_n(x),$$

donc

$$\Delta_h^2 F(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{2(\cos(nh) - 1)}{n^2 h^2} u_n(x) = - \sum_{n \geq 1} \left( \frac{\sin(nh/2)}{nh/2} \right)^2 u_n(x).$$

On utilise alors le lemme de Riemann suivant.

**Lemme.** Si  $\sum u_n$  est une série convergente de somme 0, alors

$$\sum_{n \geq 1} \left( \frac{\sin(nh/2)}{nh/2} \right)^2 u_n \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

*Preuve du lemme.* Notons  $R_N = \sum_{n=N}^{+\infty} u_n$ . Alors  $R_N \rightarrow 0$  et  $R_1 = 0$ . En posant

$$\lambda_n(h) = \left( \frac{\sin(nh/2)}{nh/2} \right)^2,$$

une sommation par parties donne

$$\sum_{n \geq 1} \lambda_n(h) u_n = \sum_{n \geq 2} (\lambda_n(h) - \lambda_{n-1}(h)) R_n.$$

La fonction  $w(t) = \left( \frac{\sin(t/2)}{t/2} \right)^2$  possède une variation totale finie sur  $[0, +\infty[$ , donc

$$\sum_{n \geq 2} |\lambda_n(h) - \lambda_{n-1}(h)|$$

est bornée indépendamment de  $h$ . On coupe alors la somme en deux : les termes d'indice  $n$  grand sont petits parce que  $R_n \rightarrow 0$ , et les termes d'indice fixé tendent vers 0 puisque  $\lambda_n(h) - \lambda_{n-1}(h) \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow 0$ . Le lemme est démontré.

Appliqué, pour chaque  $x$ , à la série numérique  $\sum u_n(x)$  de somme nulle, ce lemme donne

$$\boxed{\Delta_h^2 F(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad (x \in \mathbb{R}).}$$

Autrement dit, la dérivée seconde généralisée de  $F$  est nulle ; en notation distributionnelle,

$$\boxed{T_F'' = 0.}$$

On peut aussi le lire comme le théorème classique de Schwarz : une fonction continue dont la différence seconde symétrique tend vers 0 en tout point est affine. Pour mémoire, voici l'argument.

Soient  $\alpha < \beta$  et  $L$  la fonction affine qui coïncide avec  $F$  en  $\alpha$  et en  $\beta$ . Pour  $\eta > 0$ , considérons

$$G(x) = F(x) - L(x) - \eta(x - \alpha)(\beta - x).$$

Si  $G$  avait un maximum strictement positif en un point intérieur  $c \in ]\alpha, \beta[$ , alors, pour  $h$  assez petit,

$$\frac{G(c+h) + G(c-h) - 2G(c)}{h^2} \leq 0,$$

alors que la limite de ce quotient vaut  $2\eta > 0$ , contradiction. Donc

$$F(x) - L(x) \leq \eta(x - \alpha)(\beta - x).$$

En laissant  $\eta \rightarrow 0^+$ , on obtient  $F \leq L$  sur  $[\alpha, \beta]$ . En appliquant le même raisonnement à  $-F$ , on obtient  $F \geq L$ . Ainsi  $F = L$  sur  $[\alpha, \beta]$ . Comme  $\alpha$  et  $\beta$  sont arbitraires,

$$\boxed{F \text{ est affine sur } \mathbb{R}.}$$

Cela est cohérent avec Q20, qui caractérise les fonctions continues dont la dérivée seconde distributionnelle est nulle.

**Q32.** La fonction  $F$  est bornée car

$$|F(x)| \leq \sum_{n \geq 1} \frac{|a_n| + |b_n|}{n^2} < +\infty.$$

Or une fonction affine bornée sur  $\mathbb{R}$  est constante. Donc

$$\boxed{F \text{ est constante.}}$$

**Q33.** Écrivons  $F(x) = c$ . Comme la série définissant  $F$  converge normalement, on peut intégrer terme à terme sur  $[0, 2\pi]$  :

$$2\pi c = \int_0^{2\pi} F(x) dx = \sum_{n \geq 1} \left( \frac{a_n}{n^2} \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx + \frac{b_n}{n^2} \int_0^{2\pi} \sin(nx) dx \right) = 0.$$

Donc  $c = 0$ , et ainsi

$$\boxed{F = 0.}$$

**Q34.** On sait que

$$F(x) = \sum_{n \geq 1} \left( \frac{a_n}{n^2} \cos(nx) + \frac{b_n}{n^2} \sin(nx) \right) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

et cette série est absolument convergente puisque  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont bornées. D'après Q29 appliquée aux suites

$$\left( \frac{a_n}{n^2} \right)_{n \geq 1} \quad \text{et} \quad \left( \frac{b_n}{n^2} \right)_{n \geq 1},$$

on obtient

$$\frac{a_n}{n^2} = \frac{b_n}{n^2} = 0 \quad (n \geq 1).$$

Par conséquent

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad a_n = b_n = 0.}$$

C'est le théorème d'unicité de Cantor : une série trigonométrique convergeant partout vers 0 a tous ses coefficients nuls.