

Correction détaillée

Centrale-Supélec – Mathématiques 1 – PSI

Obtention de piles successifs lors de lancers d'une pièce

On note $p = \mathbb{P}(P)$ et $q = \mathbb{P}(F) = 1 - p$. Dans toute la correction, on se place dans le cas non trivial $0 < p < 1$. Les cas limites se traitent directement : si $p = 1$, les piles sont toujours obtenus, et si $p = 0$, aucun pile n'apparaît.

Pour $n \geq 1$, X_n désigne le premier rang auquel apparaît une série de n piles consécutifs. On note aussi, lorsque c'est utile,

$$a_k^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = k).$$

A – Les cas $n = 1$ et $n = 2$

I – Le cas $n = 1$

Q1. Loi de X_1

Obtenir pour la première fois un pile au rang k signifie obtenir $k - 1$ faces puis un pile. Par indépendance des lancers,

$$\forall k \geq 1, \quad \mathbb{P}(X_1 = k) = q^{k-1}p.$$

De plus,

$$\mathbb{P}(X_1 = +\infty) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\text{les } m \text{ premiers lancers sont Face}) = \lim_{m \rightarrow +\infty} q^m = 0.$$

Ainsi X_1 suit une loi géométrique de paramètre p sur \mathbb{N}^* .

Q2. Fonction génératrice, espérance et variance

Pour $|z| < 1/q$,

$$G_{X_1}(z) = \mathbb{E}(z^{X_1}) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}z^k = pz \sum_{k=0}^{+\infty} (qz)^k = \frac{pz}{1 - qz}.$$

On en déduit, par les formules usuelles de la loi géométrique,

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{p}, \quad \mathbb{V}(X_1) = \frac{q}{p^2}.$$

Q3. Justification des résultats de Q2

La série précédente est une série géométrique de raison qz . Elle converge pour $|qz| < 1$ et donne

$$G_{X_1}(z) = \frac{pz}{1 - qz}.$$

Ensuite,

$$G'_{X_1}(z) = \frac{p}{(1 - qz)^2}, \quad G''_{X_1}(z) = \frac{2pq}{(1 - qz)^3}.$$

Comme $1 - q = p$, on obtient

$$\mathbb{E}(X_1) = G'_{X_1}(1) = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p},$$

et

$$\mathbb{E}(X_1(X_1 - 1)) = G''_{X_1}(1) = \frac{2pq}{p^3} = \frac{2q}{p^2}.$$

Donc

$$\mathbb{E}(X_1^2) = G''_{X_1}(1) + G'_{X_1}(1) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p},$$

puis

$$\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

II – Le cas $n = 2$

Dans cette partie, on pose

$$a_k = \mathbb{P}(X_2 = k).$$

Q4. Valeurs initiales

Il est impossible d'obtenir deux piles consécutifs au rang 1, donc

$$a_1 = \mathbb{P}(X_2 = 1) = 0.$$

Au rang 2, il faut obtenir deux piles aux deux premiers lancers :

$$a_2 = \mathbb{P}(X_2 = 2) = p^2.$$

Q5. Les deux premiers lancers lorsque $X_2 = k > 2$

Si $X_2 = k > 2$, les deux premiers lancers ne peuvent pas être PP, sinon $X_2 = 2$. Les résultats possibles pour les deux premiers lancers sont donc

$$\text{FF}, \quad \text{FP}, \quad \text{PF}.$$

Pour établir la récurrence, il est plus efficace de distinguer les deux cas suivants :

$$\text{premier lancer F}, \quad \text{deux premiers lancers PF}.$$

Q6. Relation de récurrence

Soit $k > 2$. Si le premier lancer est F, on repart au rang 2 avec le même problème, et il reste $k - 1$ lancers à attendre. Si les deux premiers lancers sont PF, on repart après le deuxième lancer, et il reste $k - 2$ lancers à attendre. Ainsi, par indépendance,

$$\boxed{a_k = qa_{k-1} + pqa_{k-2} \quad (k > 2)}.$$

Q7. Racines de $X^2 - qX - pq$

Les racines du trinôme sont

$$r_1 = \frac{q + \sqrt{q^2 + 4pq}}{2}, \quad r_2 = \frac{q - \sqrt{q^2 + 4pq}}{2}.$$

On a $r_1 > 0$ et $r_2 < 0$. De plus,

$$P(0) = -pq < 0, \quad P(1) = 1 - q - pq = p^2 > 0,$$

donc $r_1 \in (0, 1)$. Enfin,

$$P(-1) = 1 + q - pq > 0, \quad P(0) < 0,$$

donc $r_2 \in (-1, 0)$. Comme $r_1 + r_2 = q > 0$, on a

$$r_1 > |r_2|.$$

Ainsi

$$\boxed{r_2 < r_1, \quad |r_2| < |r_1| < 1.}$$

Q8. Rayon de convergence de la série

On considère

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (r_1^{k-1} - r_2^{k-1}) z^k.$$

Comme $|r_2| < r_1$, on a

$$r_1^{k-1} - r_2^{k-1} \sim r_1^{k-1}$$

en module au sens de la racine k -ième. Ainsi

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} |r_1^{k-1} - r_2^{k-1}|^{1/k} = r_1.$$

Le rayon de convergence vaut donc

$$\boxed{R = \frac{1}{r_1}.}$$

En particulier, $R > 1$.

Q9. Expression de $\mathbb{P}(X_2 = k)$

La relation

$$a_k = qa_{k-1} + pqa_{k-2}$$

a pour équation caractéristique

$$X^2 - qX - pq = 0.$$

Donc

$$a_k = \alpha r_1^{k-1} + \beta r_2^{k-1}.$$

Les conditions initiales $a_1 = 0$ et $a_2 = p^2$ donnent

$$\alpha + \beta = 0, \quad \alpha(r_1 - r_2) = p^2.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall k \geq 2, \quad \mathbb{P}(X_2 = k) = \frac{p^2}{r_1 - r_2} (r_1^{k-1} - r_2^{k-1}).}$$

Q10. Probabilité de l'événement $\{X_2 = +\infty\}$

On a

$$\{X_2 = +\infty\} = \bigcap_{k \geq 1} \{X_2 > k\}.$$

Pour $m \geq 1$, si les $2m$ premiers lancers ne contiennent jamais deux piles consécutifs, alors chacun des blocs indépendants

$$(1, 2), (3, 4), \dots, (2m-1, 2m)$$

ne peut pas être égal à PP. Donc

$$\mathbb{P}(X_2 > 2m) \leq (1 - p^2)^m.$$

En faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient

$$\boxed{\mathbb{P}(X_2 = +\infty) = 0.}$$

Q11. Fonction génératrice de X_2

Pour $|z| < R = 1/r_1$,

$$\begin{aligned} G_{X_2}(z) &= \sum_{k=2}^{+\infty} a_k z^k \\ &= \frac{p^2}{r_1 - r_2} \sum_{k=2}^{+\infty} (r_1^{k-1} - r_2^{k-1}) z^k \\ &= \frac{p^2}{r_1 - r_2} \left(\frac{r_1 z^2}{1 - r_1 z} - \frac{r_2 z^2}{1 - r_2 z} \right). \end{aligned}$$

Or $r_1 + r_2 = q$ et $r_1 r_2 = -pq$. Ainsi

$$(1 - r_1 z)(1 - r_2 z) = 1 - qz - pqz^2.$$

On en déduit

$$\boxed{G_{X_2}(z) = \frac{p^2 z^2}{1 - qz - pqz^2} \quad (|z| < R).}$$

Q12. Existence de l'espérance et de la variance

Comme $r_1 < 1$, le rayon de convergence $R = 1/r_1$ est strictement supérieur à 1. La fonction génératrice est donc dérivable deux fois dans un voisinage de 1. Ainsi X_2 admet une espérance et une variance finies.

Q13. Espérance et variance de X_2

On part de

$$G(z) = \frac{p^2 z^2}{1 - qz - pqz^2}.$$

Un calcul donne

$$G'(1) = \frac{1 + p}{p^2},$$

donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X_2) = \frac{1 + p}{p^2}.}$$

De même,

$$G''(1) = \frac{2(1 + 2p - p^2 - p^3)}{p^4}.$$

Comme

$$\mathbb{V}(X_2) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_2) &= \frac{2(1 + 2p - p^2 - p^3)}{p^4} + \frac{1 + p}{p^2} - \frac{(1 + p)^2}{p^4} \\ &= \frac{1 + 2p - 2p^2 - p^3}{p^4}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbb{V}(X_2) = \frac{1}{p^4} + \frac{2}{p^3} - \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}.$$

B – Le cas $n = 3$

On note désormais

$$a_k = \mathbb{P}(X_3 = k).$$

I – Étude générale à l'aide de l'algèbre linéaire

Q14. Valeurs initiales

Il est impossible d'obtenir trois piles consécutifs au rang 1 ou au rang 2. Au rang 3, il faut obtenir PPP. Donc

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = p^3.$$

Q15. Relation de récurrence

Soit $k > 3$. Avant de redémarrer le problème, les premiers lancers peuvent être

$$F, \quad PF, \quad PPF.$$

Le cas PPP donnerait $X_3 = 3$, impossible si $k > 3$. Par indépendance,

$$a_k = qa_{k-1} + pqa_{k-2} + p^2qa_{k-3} \quad (k > 3).$$

Q16. Matrice de transition

Pour $k \geq 1$, on pose

$$U_k = \begin{pmatrix} a_{k+2} \\ a_{k+1} \\ a_k \end{pmatrix}.$$

Alors

$$U_{k+1} = \begin{pmatrix} a_{k+3} \\ a_{k+2} \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & qp & qp^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k+2} \\ a_{k+1} \\ a_k \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$M = \begin{pmatrix} q & qp & qp^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q17. Polynôme caractéristique de M

On calcule

$$\chi_M(X) = \det(XI_3 - M) = \begin{vmatrix} X - q & -qp & -qp^2 \\ -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}.$$

D'où

$$\chi_M(X) = X^3 - qX^2 - qpX - qp^2.$$

Q18. Existence et unicité d'une racine dans $]0, 1[$

Pour $x > 0$,

$$\chi_M(x) = 0 \iff x^3 = q(x^2 + px + p^2) \iff q \left(\frac{1}{x} + \frac{p}{x^2} + \frac{p^2}{x^3} \right) = 1.$$

La fonction

$$x \mapsto q \left(\frac{1}{x} + \frac{p}{x^2} + \frac{p^2}{x^3} \right)$$

est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, tend vers $+\infty$ en 0^+ , et vaut en 1

$$q(1 + p + p^2) = 1 - p^3 < 1.$$

Elle prend donc une unique fois la valeur 1 sur $]0, 1[$. On note cette racine

$$\boxed{\lambda_1 \in]0, 1[.}$$

Q19. Nombre de racines réelles de χ_M

On vérifie par développement que

$$\begin{aligned} (X - p)\chi_M(X) &= (X - p)(X^3 - qX^2 - qpX - qp^2) \\ &= X^4 - X^3 + qp^3. \end{aligned}$$

Posons

$$F(X) = X^4 - X^3 + qp^3 = X^3(X - 1) + p^3(1 - p).$$

Si $x < 0$ ou $x > 1$, alors $x^3(x - 1) > 0$, donc $F(x) > 0$. Les racines réelles de F sont donc dans $[0, 1]$. Sur $[0, 1]$,

$$F(x) = 0 \iff x^3(1 - x) = p^3(1 - p).$$

La fonction $\varphi : x \mapsto x^3(1 - x)$ est croissante sur $[0, 3/4]$ puis décroissante sur $[3/4, 1]$. Comme $x = p$ est une solution de l'équation $\varphi(x) = \varphi(p)$, cette équation admet au plus une autre solution réelle.

Or les racines de F sont constituées de p et des racines de χ_M . Comme on sait déjà que χ_M possède une racine réelle λ_1 , on en déduit que χ_M ne possède pas d'autre racine réelle.

Ainsi

$$\boxed{\chi_M \text{ admet une unique racine réelle, notée } \lambda_1.}$$

Q20. Diagonalisabilité de M dans \mathbb{C}

Le polynôme χ_M est de degré 3, à coefficients réels. Il possède une seule racine réelle λ_1 ; ses deux autres racines sont donc deux complexes conjugués non réels. On les note

$$\lambda_2 \quad \text{et} \quad \overline{\lambda_2}.$$

Ces trois racines sont distinctes. Le polynôme caractéristique de M est donc scindé à racines simples sur \mathbb{C} . Par conséquent,

$$\boxed{M \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{C}.}$$

Q21. Forme générale de $\mathbb{P}(X_3 = k)$

Comme M est diagonalisable dans \mathbb{C} , il existe $Q \in GL_3(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \overline{\lambda_2})$$

telles que $M = QDQ^{-1}$. Or

$$U_k = M^{k-1}U_1.$$

Chaque coordonnée de U_k , en particulier $a_k = \mathbb{P}(X_3 = k)$, est donc combinaison linéaire de

$$\lambda_1^{k-1}, \quad \lambda_2^{k-1}, \quad \overline{\lambda_2}^{k-1}.$$

Ainsi il existe $(A, B, C) \in \mathbb{C}^3$ tel que, pour tout $k \geq 1$,

$$a_k = A\lambda_1^{k-1} + B\lambda_2^{k-1} + C\overline{\lambda_2}^{k-1}.$$

Q22. Détermination de A

On utilise les valeurs initiales

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = p^3.$$

Elles donnent le système

$$\begin{cases} A + B + C = 0, \\ A\lambda_1 + B\lambda_2 + C\overline{\lambda_2} = 0, \\ A\lambda_1^2 + B\lambda_2^2 + C\overline{\lambda_2}^2 = p^3. \end{cases}$$

Par résolution de ce système de Vandermonde,

$$A = \frac{p^3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \overline{\lambda_2})}.$$

Comme λ_1 est réel,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \overline{\lambda_2}) = |\lambda_1 - \lambda_2|^2.$$

Donc

$$A = \frac{p^3}{|\lambda_1 - \lambda_2|^2}.$$

En particulier, A est un réel strictement positif.

Q23. Écriture réelle

Soit $r = |\lambda_2|$ et soit θ un argument de λ_2 . Alors

$$\lambda_2 = re^{i\theta}, \quad \overline{\lambda_2} = re^{-i\theta}.$$

Comme a_k est réel pour tout k , les deux coefficients associés aux racines conjuguées sont conjugués : $C = \overline{B}$. Écrivons $B = u + iv$. Alors

$$\begin{aligned} B\lambda_2^{k-1} + \overline{B}\overline{\lambda_2}^{k-1} &= 2 \operatorname{Re} \left(Br^{k-1} e^{i(k-1)\theta} \right) \\ &= 2ur^{k-1} \cos((k-1)\theta) - 2vr^{k-1} \sin((k-1)\theta). \end{aligned}$$

Il existe donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\mathbb{P}(X_3 = k) = a\lambda_1^{k-1} + br^{k-1} \cos((k-1)\theta) + cr^{k-1} \sin((k-1)\theta).$$

On peut prendre $a = A$, $b = 2 \operatorname{Re}(B)$ et $c = -2\Im(B)$.

Q24. Comparaison des modules

D'abord, comme

$$\chi_M(q) = q^3 - q^3 - qpq - qp^2 = -qp(q+p) = -pq < 0,$$

et puisque λ_1 est l'unique racine positive, on a

$$\boxed{q < \lambda_1.}$$

La somme des racines de χ_M vaut q , donc

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \overline{\lambda_2} = q.$$

Ainsi

$$\operatorname{Re}(\lambda_2) = \frac{q - \lambda_1}{2} < 0.$$

Dès lors,

$$|\lambda_2 - 1|^2 = (1 - \operatorname{Re}(\lambda_2))^2 + (\Im(\lambda_2))^2 = 1 - 2\operatorname{Re}(\lambda_2) + |\lambda_2|^2 > 1,$$

donc

$$\boxed{|\lambda_2 - 1| > 1.}$$

Enfin, le produit des racines vaut qp^2 :

$$\lambda_1 |\lambda_2|^2 = qp^2.$$

Or, comme λ_1 est racine de χ_M ,

$$\lambda_1^3 = q(\lambda_1^2 + p\lambda_1 + p^2) > qp^2.$$

Donc

$$|\lambda_2|^2 = \frac{qp^2}{\lambda_1} < \lambda_1^2.$$

Comme $\lambda_1 > 0$,

$$\boxed{|\lambda_2| < \lambda_1.}$$

Q25. Équivalent de $\mathbb{P}(X_3 = k)$

D'après Q21 et Q24,

$$\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1.$$

Les termes associés à λ_2 et à $\overline{\lambda_2}$ sont donc négligeables devant λ_1^{k-1} . Ainsi

$$\mathbb{P}(X_3 = k) \sim A\lambda_1^{k-1}.$$

En l'écrivant sous la forme demandée $m\lambda_1^k$, on obtient

$$\boxed{\mathbb{P}(X_3 = k) \sim m\lambda_1^k \quad \text{avec} \quad m = \frac{A}{\lambda_1} = \frac{p^3}{\lambda_1 |\lambda_1 - \lambda_2|^2} > 0.}$$

II – Un cas particulier : $p = \frac{3}{4}$

Dans cette sous-partie,

$$p = \frac{3}{4}, \quad q = \frac{1}{4}.$$

Q26. Une racine entière de $\chi_M(X/4)$

Ici

$$\chi_M(X) = X^3 - \frac{1}{4}X^2 - \frac{3}{16}X - \frac{9}{64}.$$

Donc

$$\chi_M\left(\frac{X}{4}\right) = \frac{1}{64}(X^3 - X^2 - 3X - 9).$$

On vérifie

$$3^3 - 3^2 - 3 \cdot 3 - 9 = 27 - 9 - 9 - 9 = 0.$$

Ainsi

$$\boxed{3 \text{ est une racine entière de } \chi_M(X/4).}$$

Q27. Racines de χ_M

On factorise

$$X^3 - X^2 - 3X - 9 = (X - 3)(X^2 + 2X + 3).$$

Les racines de $X^2 + 2X + 3$ sont

$$-1 + i\sqrt{2}, \quad -1 - i\sqrt{2}.$$

Par conséquent, les racines de χ_M sont

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{3}{4}, \quad \lambda_2 = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{4}, \quad \overline{\lambda_2} = \frac{-1 - i\sqrt{2}}{4}.}$$

Q28. Équivalent de $\mathbb{P}(X_3 = k)$

On utilise Q25. D'abord,

$$|\lambda_1 - \lambda_2|^2 = \left| \frac{3}{4} - \frac{-1 + i\sqrt{2}}{4} \right|^2 = \left| \frac{4 - i\sqrt{2}}{4} \right|^2 = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}.$$

Puis

$$A = \frac{p^3}{|\lambda_1 - \lambda_2|^2} = \frac{27/64}{9/8} = \frac{3}{8}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(X_3 = k) \sim \frac{3}{8} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.$$

De façon équivalente,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_3 = k) \sim \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^k.}$$

C – Étude générale par la fonction génératriceOn fixe $n \geq 1$ et on pose

$$a_k = \mathbb{P}(X_n = k).$$

On rappelle la fonction

$$f(t) = t^n - q \sum_{i=1}^n p^{i-1} t^{n-i}.$$

Q29. Valeurs initiales

Pour obtenir n piles consécutifs pour la première fois au rang k , il faut nécessairement $k \geq n$. Ainsi

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \quad a_k = 0.$$

Au rang n , il faut obtenir n piles dès le début :

$$a_n = p^n.$$

Donc

$$\mathbb{P}(X_n = k) = 0 \quad (1 \leq k < n), \quad \mathbb{P}(X_n = n) = p^n.$$

Q30. Relation de récurrence générale

Soit $k > n$. Pour que la première série de n piles se termine au rang k , les premiers lancers, avant redémarrage, doivent être de l'une des formes

$$F, \quad PF, \quad PPF, \quad \dots, \quad P^{n-1}F.$$

Le cas P^n donnerait $X_n = n$, impossible puisque $k > n$. Par indépendance, on obtient

$$a_k = qa_{k-1} + qpa_{k-2} + \dots + qp^{n-1}a_{k-n} \quad (k > n).$$

Q31. Choix d'un réel t

On calcule

$$f(1) = 1 - q \sum_{i=1}^n p^{i-1} = 1 - q \frac{1-p^n}{1-p} = 1 - (1-p^n) = p^n > 0.$$

Comme f est continue et comme $p < 1$, il existe un réel $t \in [p, 1[$, choisi suffisamment proche de 1, tel que

$$f(t) \geq 0.$$

On fixe un tel réel t dans la suite de la partie C.

Q32. Majoration de $\mathbb{P}(X_n = k)$

On montre par récurrence que

$$\forall k \geq 1, \quad a_k \leq t^k.$$

Pour $1 \leq k < n$, $a_k = 0 \leq t^k$. Pour $k = n$,

$$a_n = p^n \leq t^n$$

car $t \geq p$.

Supposons maintenant le résultat vrai jusqu'au rang $k-1$, avec $k > n$. Par la récurrence de Q30,

$$\begin{aligned} a_k &\leq q \sum_{i=1}^n p^{i-1} t^{k-i} \\ &= t^{k-n} q \sum_{i=1}^n p^{i-1} t^{n-i}. \end{aligned}$$

Or $f(t) \geq 0$ signifie exactement

$$q \sum_{i=1}^n p^{i-1} t^{n-i} \leq t^n.$$

Donc

$$a_k \leq t^{k-n} t^n = t^k.$$

Ainsi

$$\boxed{\forall k \geq 1, \quad \mathbb{P}(X_n = k) \leq t^k.}$$

Q33. Fonction génératrice de X_n

La majoration précédente montre que la série génératrice converge absolument pour

$$|z| < \frac{1}{t}.$$

Pour un tel z , posons

$$G(z) = G_{X_n}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^k.$$

D'après les valeurs initiales et la relation de récurrence,

$$G(z) - p^n z^n = q(z + pz^2 + \dots + p^{n-1} z^n)G(z).$$

Donc

$$G(z) = \frac{p^n z^n}{1 - qz - qpz^2 - \dots - qp^{n-1} z^n}.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $1 - pz$, on obtient

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{p^n z^n (1 - pz)}{(1 - pz) - qz(1 - (pz)^n)} \\ &= \frac{p^n z^n (1 - pz)}{1 - z + qp^n z^{n+1}}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{G_{X_n}(z) = \frac{p^n z^n (1 - pz)}{1 - z + qp^n z^{n+1}} \quad \left(|z| < \frac{1}{t} \right).}$$

Q34. Espérance de X_n

Comme $t < 1$, on a $1/t > 1$. La fonction génératrice est donc dérivable en 1, et X_n admet une espérance.

De plus,

$$G(1) = \frac{p^n (1 - p)}{1 - 1 + qp^n} = 1,$$

ce qui confirme que $\mathbb{P}(X_n < +\infty) = 1$.

Posons

$$N(z) = p^n z^n (1 - pz), \quad D(z) = 1 - z + qp^n z^{n+1}.$$

Alors $G = N/D$, et

$$N(1) = D(1) = qp^n.$$

On calcule

$$N'(1) = p^n (nq - p), \quad D'(1) = -1 + qp^n (n + 1).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} G'(1) &= \frac{N'(1)D(1) - N(1)D'(1)}{D(1)^2} \\ &= \frac{N'(1) - D'(1)}{qp^n} \\ &= \frac{p^n(nq - p) + 1 - qp^n(n + 1)}{qp^n} \\ &= \frac{1 - p^n}{qp^n}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \frac{1 - p^n}{qp^n}.$$

Q35. Coefficients à partir d'une décomposition en éléments simples

On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{C}$, des complexes deux à deux distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de module strictement supérieur à 1, et des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$G_{X_n}(z) = a + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{z - \lambda_i}.$$

Pour $|z|$ assez petit,

$$\frac{\alpha_i}{z - \lambda_i} = -\frac{\alpha_i}{\lambda_i} \frac{1}{1 - z/\lambda_i} = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_i}{\lambda_i^{k+1}} z^k.$$

Ainsi le coefficient de z^k , pour $k \geq 1$, vaut

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\lambda_i^{k+1}}.$$

Par unicité du développement en série entière,

$$\boxed{\forall k \geq 1, \quad \mathbb{P}(X_n = k) = -\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\lambda_i^{k+1}}.$$

Le coefficient constant impose en outre

$$a = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\lambda_i},$$

car $G_{X_n}(0) = 0$.

D – Obtenir une succession de piles dans les k premiers lancers

On fixe $n \geq 1$. Pour $k \geq 1$, on note $A_{n,k}$ l'événement :

$$A_{n,k} = \{\text{il existe, parmi les } k \text{ premiers lancers, une série d'au moins } n \text{ piles consécutifs}\}.$$

On utilisera la récurrence homogène suivante : pour des conditions initiales b_1, \dots, b_n , il existe une unique suite $(u_k)_{k \geq 1}$ telle que

$$u_i = b_i \quad (1 \leq i \leq n),$$

et

$$\forall k > n, \quad u_k = qu_{k-1} + qpu_{k-2} + \dots + qp^{n-1}u_{k-n}. \quad (*)$$

Q36. Valeurs initiales de $\mathbb{P}(A_{n,k})$

Si $k < n$, il est impossible d'avoir une série de n piles consécutifs dans les k premiers lancers. Donc

$$\mathbb{P}(A_{n,k}) = 0 \quad (1 \leq k < n).$$

Pour $k = n$, il faut que les n premiers lancers soient tous des piles :

$$\mathbb{P}(A_{n,n}) = p^n.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}(A_{n,k}) = 0 \quad (1 \leq k < n), \quad \mathbb{P}(A_{n,n}) = p^n.}$$

Q37. Relation de récurrence pour $\mathbb{P}(A_{n,k})$

Soit $k > n$. On décompose selon le début de la suite de lancers.

Ou bien les n premiers lancers sont tous des piles : cela a probabilité p^n et l'événement $A_{n,k}$ est réalisé.

Ou bien, avant le premier face, on observe $i - 1$ piles, avec $1 \leq i \leq n$, puis un face. Le motif initial est alors

$$P^{i-1}F$$

et a probabilité $p^{i-1}q$. Après ce face, le problème redémarre sur les $k - i$ lancers restants.

Par indépendance,

$$\boxed{\mathbb{P}(A_{n,k}) = p^n + q\mathbb{P}(A_{n,k-1}) + qp\mathbb{P}(A_{n,k-2}) + \dots + qp^{n-1}\mathbb{P}(A_{n,k-n}) \quad (k > n).}$$

Q38. Fonction Python

Une fonction possible est la suivante.

```
def proba_A(p, k, n):
    """Renvoie [P(A_{n,1}), ..., P(A_{n,k})]."""
    if not (0 < p < 1):
        raise ValueError("Il faut 0 < p < 1.")
    if k < 1 or n < 1:
        raise ValueError("Il faut k >= 1 et n >= 1.")

    q = 1 - p
    P = [0.0] * (k + 1) # P[ell] contiendra P(A_{n,ell})

    # Valeurs initiales
    if k >= n:
        P[n] = p ** n

    # Relation de recurrence
    for ell in range(n + 1, k + 1):
        s = p ** n
        for i in range(1, n + 1):
            s += q * (p ** (i - 1)) * P[ell - i]
        P[ell] = s

    return P[1:]
```

Q39. Suite constante solution de la récurrence inhomogène

On cherche une suite constante $v_k = L$ vérifiant, pour $k > n$,

$$L = p^n + qL + qpL + \cdots + qp^{n-1}L.$$

Or

$$q(1 + p + \cdots + p^{n-1}) = 1 - p^n.$$

Donc

$$L = p^n + (1 - p^n)L.$$

Ainsi

$$p^n L = p^n,$$

d'où

$$\boxed{v_k = 1 \text{ pour tout } k.}$$

Q40. Choix des conditions initiales pour u_k

On veut

$$\mathbb{P}(A_{n,k}) = 1 - u_k.$$

Il est naturel de prendre

$$u_k = 1 - \mathbb{P}(A_{n,k}) = \mathbb{P}(\overline{A_{n,k}}),$$

c'est-à-dire la probabilité de ne pas avoir encore obtenu n piles consécutifs dans les k premiers lancers.

D'après Q36,

$$u_k = 1 \quad (1 \leq k < n), \quad u_n = 1 - p^n.$$

Donc les conditions initiales sont

$$\boxed{b_1 = \cdots = b_{n-1} = 1, \quad b_n = 1 - p^n.}$$

Vérifions la récurrence. En posant $P_k = \mathbb{P}(A_{n,k})$, Q37 donne

$$P_k = p^n + \sum_{i=1}^n qp^{i-1}P_{k-i}.$$

Donc

$$\begin{aligned} u_k &= 1 - P_k \\ &= 1 - p^n - \sum_{i=1}^n qp^{i-1}(1 - u_{k-i}) \\ &= 1 - p^n - \sum_{i=1}^n qp^{i-1} + \sum_{i=1}^n qp^{i-1}u_{k-i} \\ &= \sum_{i=1}^n qp^{i-1}u_{k-i}, \end{aligned}$$

car $\sum_{i=1}^n qp^{i-1} = 1 - p^n$. C'est exactement la relation (*).

Q41. Positivité et décroissance de (u_k)

On a

$$u_k = \mathbb{P}(\overline{A_{n,k}}).$$

Pour tout k , l'événement $\overline{A_{n,k}}$ contient par exemple l'événement "les k premiers lancers sont tous Face", de probabilité $q^k > 0$. Donc

$$u_k > 0.$$

Pour $k \geq n$, l'événement $A_{n,k}$ contient l'événement "les n premiers lancers sont tous Pile", de probabilité $p^n > 0$. Donc

$$u_k = 1 - \mathbb{P}(A_{n,k}) < 1.$$

Enfin,

$$A_{n,k} \subset A_{n,k+1},$$

car si une série de n piles est apparue dans les k premiers lancers, elle est encore apparue dans les $k+1$ premiers. Par passage aux complémentaires,

$$\overline{A_{n,k+1}} \subset \overline{A_{n,k}}.$$

Ainsi

$$u_{k+1} \leq u_k.$$

Donc

$$\boxed{0 < u_k < 1 \quad (k \geq n), \quad (u_k) \text{ est décroissante.}}$$

Q42. Décroissance géométrique de u_k

On pose

$$M = \max_{n \leq i \leq 2n-1} \frac{u_{i+1}}{u_i}.$$

Pour $i \geq n$, on a en fait $u_{i+1} < u_i$: il existe une probabilité strictement positive d'avoir aucune série de n piles dans les i premiers lancers mais d'en avoir une qui se termine au rang $i+1$; par exemple le motif

$$\text{F}^{i-n+1} \text{P}^n$$

a une probabilité $q^{i-n+1} p^n > 0$. Donc

$$0 < M < 1.$$

Comme $f(1) = p^n > 0$ et f est continue, on peut choisir

$$\alpha \in]M, 1[$$

suffisamment proche de 1 pour que

$$f(\alpha) \geq 0.$$

Autrement dit,

$$q \sum_{i=1}^n p^{i-1} \alpha^{n-i} \leq \alpha^n. \quad (1)$$

Montrons par récurrence que

$$\boxed{u_k \leq \alpha^{k-n} \quad (k \geq n+1).}$$

Pour $n+1 \leq k \leq 2n$, on écrit

$$u_k = u_n \prod_{j=n}^{k-1} \frac{u_{j+1}}{u_j} \leq u_n M^{k-n} < \alpha^{k-n},$$

car $u_n < 1$ et $M < \alpha$.

Supposons maintenant l'inégalité vraie jusqu'au rang $k - 1$, avec $k \geq 2n + 1$. La récurrence homogène donne

$$\begin{aligned} u_k &= \sum_{i=1}^n qp^{i-1}u_{k-i} \\ &\leq \sum_{i=1}^n qp^{i-1}\alpha^{k-i-n} \\ &= \alpha^{k-2n}q \sum_{i=1}^n p^{i-1}\alpha^{n-i} \\ &\leq \alpha^{k-2n}\alpha^n = \alpha^{k-n}, \end{aligned}$$

d'après (1). La propriété est démontrée.

Q43. Probabilité d'obtenir finalement une série de n piles

Les événements $A_{n,k}$ sont croissants avec k . Donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_{n,k}\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_{n,k}).$$

Or

$$\mathbb{P}(A_{n,k}) = 1 - u_k.$$

D'après Q42, $u_k \leq \alpha^{k-n}$ avec $0 < \alpha < 1$, donc

$$u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_{n,k}\right) = 1.}$$

En particulier, en prenant $n = 10000$, on obtient : lors d'une infinité de lancers d'une pièce avec $0 < p < 1$, on obtiendra presque sûrement, à un moment, une série d'au moins 10000 piles consécutifs.

Q44. Application numérique : $n = 5$, $p = 1/2$, $k = 100$

On admet que l'on peut prendre

$$\alpha = 0,9827$$

et que

$$0,9827^{95} < 0,193.$$

D'après Q42, avec $n = 5$ et $k = 100$,

$$u_{100} \leq \alpha^{100-5} = 0,9827^{95} < 0,193.$$

Donc

$$\mathbb{P}(A_{5,100}) = 1 - u_{100} > 1 - 0,193 = 0,807.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}(A_{5,100}) > 0,8.}$$

Autrement dit, en 100 lancers d'une pièce équilibrée, la probabilité d'obtenir au moins cinq piles consécutifs est supérieure à 0,8.

Q45. Démarche algébrique pour obtenir une expression fermée

L'idée est de reprendre la méthode de la partie B pour la suite homogène (u_k) .

On introduit le vecteur

$$V_k = \begin{pmatrix} u_{k+n-1} \\ u_{k+n-2} \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}.$$

La récurrence (*) s'écrit

$$V_{k+1} = M_n V_k,$$

où M_n est la matrice compagnon

$$M_n = \begin{pmatrix} q & qp & qp^2 & \cdots & qp^{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_n(X) = X^n - qX^{n-1} - qpX^{n-2} - \cdots - qp^{n-1} = f(X).$$

On montre ensuite que les racines μ_1, \dots, μ_n de f sont simples et vérifient

$$|\mu_i| < 1.$$

En effet, si $f(\mu) = 0$ et $|\mu| \geq 1$, alors

$$|\mu|^n \leq q \sum_{i=1}^n p^{i-1} |\mu|^{n-i} \leq q \sum_{i=1}^n p^{i-1} |\mu|^{n-1} = (1 - p^n) |\mu|^{n-1},$$

ce qui donne $|\mu| \leq 1 - p^n < 1$, contradiction. Ainsi toutes les racines sont de module strictement inférieur à 1.

Indiquons aussi comment vérifier la simplicité des racines, comme en Q19. En multipliant par $X - p$, on obtient

$$(X - p)f(X) = X^{n+1} - X^n + qp^n.$$

Si une racine μ de f était multiple, alors, sauf éventuellement pour $\mu = p$, elle serait racine commune de $X^{n+1} - X^n + qp^n$ et de sa dérivée

$$X^{n-1}((n+1)X - n).$$

Comme 0 n'est pas racine de f , il faudrait $\mu = n/(n+1)$. Cette situation ne peut se produire que lorsque $p = n/(n+1)$, auquel cas $\mu = p$ et le facteur $(X - p)$ absorbe exactement une multiplicité : la racine de f reste simple. On obtient donc n racines simples.

La matrice M_n est alors diagonalisable sur \mathbb{C} . Les coordonnées de V_k , donc u_k , sont des combinaisons linéaires des suites géométriques μ_i^k . Ainsi il existe $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$u_k = \sum_{i=1}^n c_i \mu_i^k.$$

Comme $\mathbb{P}(A_{n,k}) = 1 - u_k$, on obtient finalement

$$\mathbb{P}(A_{n,k}) = 1 - \sum_{i=1}^n c_i \mu_i^k, \quad |\mu_i| < 1.$$