EXCELLENCE MATHS

Polynômes de Jacobi

Corrigé détaillé — Mathématiques 2 PSI

Produit scalaire, coefficients binomiaux, polynômes orthogonaux, polynômes de Legendre

Note de lecture. Le scan fourni présente un saut de numérotation : l'énoncé de la question 13 n'est pas visible. On insère à cet endroit la propriété naturelle utilisée ensuite : le coefficient dominant de P_k est strictement positif. Dans la question 25, le cas i=0 se traite séparément dans l'intégration par parties. Enfin, dans la partie E, la formule de Rodrigues donnée correspond aux polynômes de Legendre usuels, orthogonaux ; la normalisation orthonormale s'obtient en multipliant L_k par $\sqrt{(2k+1)/2}$.

Partie A — Un produit scalaire

Q1. Intégrale de Riemann en 0

On sait que l'intégrale impropre $\int_0^1 t^{-\delta}\,dt$ converge si et seulement si $\delta < 1$. Dans ce cas :

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^{\delta}} = \int_0^1 t^{-\delta}\,dt = \frac{1}{1-\delta}.$$

Si $\delta \geq 1$, l'intégrale diverge.

Q2. Singularité en une borne

Pour $a > 0$, le changement de variable $u=a-t$ donne :

$$\int_0^a \frac{dt}{(a-t)^{\delta}} = \int_0^a u^{-\delta}\,du.$$

La condition nécessaire et suffisante de convergence est donc encore $\delta < 1$. Lorsque l'intégrale converge, sa valeur est :

$$\frac{a^{1-\delta}}{1-\delta}.$$

C'est exactement le résultat utilisé ensuite au voisinage de -1 et de 1.

Q3. Convergence avec le poids de Jacobi

Soit f continue sur $[-1,1]$. Elle est bornée : il existe $M \geq 0$ tel que $|f(t)| \leq M$. Au voisinage de 1, le facteur $(1+t)^{\beta}$ est borné, et il suffit d'étudier $(1-t)^{\alpha}$. Comme $\alpha > -1$, l'intégrale converge. Au voisinage de -1, on raisonne de même avec $(1+t)^{\beta}$, et $\beta > -1$.

Ainsi l'intégrale impropre $\int_{-1}^1 (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta} f(t)\,dt$ converge.

Q4. Produit scalaire

Posons $w(t)=(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$. Pour $P,Q\in\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^1 w(t)P(t)Q(t)\,dt$ converge par la question précédente.

$$\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}P(t)Q(t)\,dt.$$

La symétrie et la bilinéarité découlent de celles de l'intégrale. Enfin, $\langle P,P\rangle=\int wP^2\geq 0$. Si $\langle P,P\rangle=0$, alors la fonction continue wP^2, positive sur $]-1,1[$, est nulle ; comme $w>0$ sur $]-1,1[$, P est nul sur un intervalle, donc $P=0$. C'est donc bien un produit scalaire.

I — Premier exemple : α=β=−1/2

Q5. Calcul de ⟨1,X⟩

On obtient une intégrale impaire sur un intervalle symétrique :

$$\langle 1,X\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=0.$$

Q6. Normes de 1 et X

Avec le changement de variable $t=\sin\theta$, on a :

$$|1|^2=\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\pi,$$

$$|X|^2=\int_{-1}^{1}\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2}.$$

Donc :

$$|1|=\sqrt{\pi},\qquad |X|=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

II — Second exemple : α=β=0

Q7. Produit scalaire des monômes

Ici $\langle X^i,X^j\rangle=\int_{-1}^{1}t^{i+j}dt$. Ainsi :

$$\langle X^i,X^j\rangle=0\quad\text{si}\quad i+j\quad\text{est impair.}$$

$$\langle X^i,X^j\rangle=\frac{2}{i+j+1}\quad\text{si}\quad i+j\quad\text{est pair.}$$

Q8. Norme de X^i

$$|X^i|^2=\int_{-1}^{1}t^{2i}\,dt=\frac{2}{2i+1},\qquad |X^i|=\sqrt{\frac{2}{2i+1}}.$$

Partie B — Autour des coefficients binomiaux

Q9. Formule de Vandermonde

Soit F un ensemble à m+p éléments, partitionné en $A \cup B$ avec $|A|=m$ et $|B|=p$. Comptons les parties à k éléments de F. Il y en a $C(m+p,k)$. Si une telle partie contient $k-j$ éléments de A et j éléments de B, il y a $C(m,k-j)C(p,j)$ choix.

En sommant sur j, on obtient :

$$\binom{m+p}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{k-j}\binom{p}{j}.$$

Les termes impossibles sont nuls, ce qui permet de conserver la somme de 0 à k.

Q10. Comparaison avec les coefficients B

Pour $n,k \in \mathbb{N}$ et $k \le n$:

$$B_k^n = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}.$$

Les deux nombres sont donc égaux.

Partie C — Une famille de polynômes

On travaille dans $E=\mathbb{R}_n[X]$. La base $(P_0,\dots,P_n)$ est orthonormale et vérifie les deux conditions de l'énoncé.

I — Premières propriétés des P_k

Q11. Degré de P_k

La relation $\mathrm{Vect}(P_0,\dots,P_k)=\mathrm{Vect}(1,X,\dots,X^k)$ montre d'abord que $\deg(P_k)\le k$. Si $\deg(P_k)\le k-1$, alors P_k appartiendrait à $\mathrm{Vect}(1,X,\dots,X^{k-1})=\mathrm{Vect}(P_0,\dots,P_{k-1})$, ce qui contredirait l'indépendance de la base. Donc $\deg(P_k)=k$.

Q12. Orthogonalité aux polynômes de degré inférieur

Pour $k\ge 1$, tout polynôme Q de degré au plus $k-1$ appartient à $\mathrm{Vect}(P_0,\dots,P_{k-1})$. Comme la famille est orthonormale, P_k est orthogonal à chacun des P_j pour $j<k$. Donc :

$$P_k \in \mathrm{Vect}(1,X,\dots,X^{k-1})^{\perp}.$$

Q13. Coefficient dominant

Le texte de cette question n'est pas visible sur le scan. La propriété utile est la suivante. Si λ_k désigne le coefficient dominant de P_k, alors $\lambda_k>0$. En effet, en écrivant $P_k=\lambda_k X^k+R$ avec $\deg R\le k-1$, la question 12 donne $\langle P_k,R\rangle=0$, donc :

$$\langle P_k, X^k\rangle = \frac{1}{\lambda_k}\langle P_k, P_k\rangle = \frac{1}{\lambda_k}.$$

Comme l'énoncé impose $\langle P_k,X^k\rangle>0$, on obtient $\lambda_k>0$.

II — Relation entre P_{k-1}, P_k et P_{k+1}

Q14. Annulation du terme dominant

Soit $\lambda_k>0$ le coefficient dominant de P_k. Le terme dominant de XP_k est $\lambda_k X^{k+1}$, et celui de P_{k+1} est $\lambda_{k+1}X^{k+1}$. En posant :

$$a_k = \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k},$$

le coefficient de X^{k+1} dans $P_{k+1}-a_k XP_k$ est nul, donc ce polynôme est de degré au plus k.

Q15. Relation à trois termes

Posons $R=P_{k+1}-a_k XP_k$. Par la question précédente, R est de degré au plus k, donc $R\in\mathrm{Vect}(P_0,\dots,P_k)$. Pour $j\le k-2$:

$$\langle XP_k, P_j\rangle = \langle P_k, XP_j\rangle = 0$$

car XP_j est de degré au plus $j+1\le k-1$. De plus $\langle P_{k+1},P_j\rangle=0$. Ainsi R est orthogonal à $P_0,\dots,P_{k-2}$. Il ne reste donc que les composantes selon P_k et P_{k-1} :

$$P_{k+1} = (a_k X + b_k)P_k + c_k P_{k-1}.$$

III — Racines des P_k

Q16. Première inégalité

Le nombre m de racines réelles situées dans $]-1,1[$, comptées avec multiplicité, ne peut pas dépasser le degré k de P_k. Donc $m\le k$.

Q17. Signe de P_kS

Le polynôme S contient, avec les mêmes multiplicités, les racines de P_k situées dans $]-1,1[$. Ainsi chaque zéro de P_kS dans $]-1,1[$ est d'ordre pair. La fonction polynomiale

$x\mapsto P_k(x)S(x)$ ne change donc pas de signe sur $]-1,1[$, et elle n'est pas identiquement nulle.

Q18. Non-nullité du produit scalaire

Le poids $w=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ est strictement positif sur $]-1,1[$. D'après la question 17, wP_kS garde un signe constant et n'est pas nulle, sauf en un nombre fini de points. Donc son intégrale est non nulle :

$$\langle P_k, S\rangle \neq 0.$$

Q19. Conclusion sur m

Si $m\leq k-1$, alors S serait de degré au plus $k-1$, donc la question 12 donnerait $\langle P_k,S\rangle=0$, contradiction avec la question 18. Ainsi $m\geq k$. Avec $m\leq k$, on conclut :

$$m=k.$$

Toutes les racines de P_k sont donc réelles et situées dans $]-1,1[$, comptées avec multiplicité.

Partie D — Polynômes de Jacobi

On pose, pour $k\in[0,n]$ et $x\in]-1,1[$:

$$g_k(x)=(1-x)^{\alpha+k}(1+x)^{\beta+k}, \qquad J_k(x)=\frac{(-1)^k}{2^k k!\,(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}g_k^{(k)}(x).$$

I — Définition

Q20. Expressions de g_0, g_1, J_0, J_1

$$g_0(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \qquad g_1(x)=(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}.$$

On a immédiatement $J_0=1$. Par dérivation de g_1 :

$$J_1(x)=\frac{1}{2}((\alpha+1)(1+x)-(\beta+1)(1-x))=\frac{(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta+2)x}{2}.$$

Q21. Dérivée p-ième de $(1-x)^\gamma$

Pour $p\in\mathbb{N}$:

$$\frac{d^p}{dx^p}(1-x)^\gamma=(-1)^p\gamma(\gamma-1)\cdots(\gamma-p+1)(1-x)^{\gamma-p}=(-1)^p p!\,B_p^\gamma(1-x)^{\gamma-p}.$$

Q22. Expression de $g_k^{(k)}$

La formule de Leibniz donne :

$$g_k^{(k)}(x) = k!\,(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{k-\ell}B_{k-\ell}^{\alpha+k}B_{\ell}^{\beta+k}(1-x)^{\ell}(1+x)^{k-\ell}.$$

Q23. Expression de J_k

En remplaçant dans la définition de J_k, les signes se regroupent sous la forme $(x-1)^{\ell}$:

$$J_k(x) = \frac{1}{2^k}\sum_{\ell=0}^{k}B_{k-\ell}^{\alpha+k}B_{\ell}^{\beta+k}(x-1)^{\ell}(x+1)^{k-\ell}.$$

Q24. Degré et coefficient dominant

Chaque terme de la somme précédente est de degré au plus k. Le coefficient de x^k vaut :

$$\frac{1}{2^k}\sum_{\ell=0}^{k}B_{k-\ell}^{\alpha+k}B_{\ell}^{\beta+k} = \frac{1}{2^k}B_k^{\alpha+\beta+2k}$$

par la formule de Vandermonde généralisée. Comme $\alpha,\beta>-1$, ce coefficient est strictement positif. Donc J_k est un polynôme de degré k, de coefficient dominant $2^{-k}B_k^{\alpha+\beta+2k}$.

II — Orthogonalité des polynômes de Jacobi

Q25. Intégration par parties

Pour $r\leq k$, les dérivées $g_k^{(r)}$ sont des sommes finies de termes du type $(1-x)^{\alpha+k-a}(1+x)^{\beta+k-b}$, avec $a+b=r$. Les exposants restant strictement supérieurs à -1, les intégrales considérées convergent. Pour $r\leq k-1$, ces fonctions tendent même vers 0 aux deux bornes.

Pour $i\geq 1$, une intégration par parties donne donc, sans terme de bord :

$$\int_{-1}^{1}x^i g_k^{(k)}(x)\,dx = -i\int_{-1}^{1}x^{i-1}g_k^{(k-1)}(x)\,dx.$$

Pour $i=0$, on lit directement $\int g_k^{(k)}=[g_k^{(k-1)}]_{-1}^{1}=0$.

Q26. Orthogonalité à X^i

Comme $wJ_k=(-1)^k g_k^{(k)}/(2^k k!)$, on a :

$$\langle J_k, X^i\rangle = \frac{(-1)^k}{2^k k!}\int_{-1}^{1} x^i g_k^{(k)}(x)\,dx.$$

En répétant l'intégration par parties, on transfère les k dérivées de g_k sur x^i. Or i<k, donc la dérivée k-ième restante de x^i est nulle. Ainsi :

$$\langle J_k, X^i\rangle = 0 \qquad (0 \le i \le k-1).$$

Q27. Base orthogonale

D'après la question 24, $\deg(J_k)=k$. Les J_k sont donc non nuls et de degrés deux à deux distincts, donc libres. Il y en a n+1 dans E, de dimension n+1 : ils forment une base.

Si $\ell<k$, alors J_ℓ est combinaison linéaire de $1, X, \ldots, X^{k-1}$, donc la question 26 donne $\langle J_k, J_\ell\rangle=0$. La base est donc orthogonale.

Q28. Passage à une base orthonormale

Il suffit de normaliser chaque vecteur :

$$\widetilde{J}_k = \frac{J_k}{\|J_k\|}.$$

Comme le coefficient dominant de J_k est positif, la condition de signe $\langle P_k, X^k\rangle>0$ est conservée.

Partie E — Le cas particulier (α,β)=(0,0)

La formule de Rodrigues donnée est :

$$L_k = \frac{1}{2^k k!}[(X^2-1)^k]^{(k)}.$$

I — Premières propriétés des L_k

Q29. Calcul de L_0, L_1, L_2, L_3

$$L_0 = 1, \qquad L_1 = X, \qquad L_2 = \frac{3X^2-1}{2}, \qquad L_3 = \frac{5X^3-3X}{2}.$$

Q30. Racines pour k=1,2,3

On trouve :

$$L_1(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$$

$$L_2(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$L_3(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \pm\sqrt{\tfrac{3}{5}}.$$

Toutes ces racines appartiennent bien à $]-1,1[$, conformément à la question 19.

Q31. Degré et coefficient dominant

Dans $(X^2-1)^k$, le terme dominant est X^{2k}. Après k dérivations, son coefficient devient $(2k)!/k!$. Ainsi :

$$\mathrm{cd}(L_k) = \frac{1}{2^k k!} \cdot \frac{(2k)!}{k!} = \frac{(2k)!}{2^k (k!)^2} = \frac{1}{2^k}\binom{2k}{k}.$$

Donc $\deg(L_k)=k$.

Q32. Parité

Le polynôme $(X^2-1)^k$ est pair. Après k dérivations, la parité est multipliée par $(-1)^k$. Donc :

$$L_k(-X) = (-1)^k L_k(X).$$

Q33. Valeurs en ±1

En utilisant l'expression de Jacobi pour $\alpha=\beta=0$, à $x=1$ seul le terme $\ell=0$ subsiste, et à $x=-1$ seul le terme $\ell=k$ subsiste. Ainsi :

$$L_k(1) = 1, \qquad L_k(-1) = (-1)^k.$$

II — Une équation différentielle vérifiée par les L_k

Q34. Identité sur g_k

Ici $g_k(x)=(1-x^2)^k$. Donc $g_k'(x)=-2kx(1-x^2)^{k-1}$, d'où :

$$(1-x^2)g_k'(x) = -2kxg_k(x).$$

Q35. Équation différentielle de Legendre

On applique la dérivée d'ordre k+1 à l'identité précédente. La formule de Leibniz donne :

$$(1-x^2)g_k^{(k+2)} - 2xg_k^{(k+1)} + k(k+1)g_k^{(k)} = 0.$$

En divisant par $2^k k!$ et en reconnaissant L_k, on obtient :

$$(1-x^2)L_k''(x) - 2xL_k'(x) + k(k+1)L_k(x) = 0.$$

III — Une majoration des L_k sur $[-1,1]$

Q36. Monotonie de f_k

Pour $k \geq 1$, posons :

$$f_k(x) = L_k(x)^2 + \frac{1-x^2}{k(k+1)} L_k'(x)^2.$$

En dérivant puis en utilisant l'équation différentielle de la question 35 :

$$f_k'(x) = \frac{2x}{k(k+1)} L_k'(x)^2 \geq 0 \qquad (0 \leq x \leq 1).$$

Ainsi f_k est croissante sur $[0,1]$. Pour $k=0$, la majoration qui suit est immédiate car $L_0=1$.

Q37. Majoration

Pour $x \in [0,1]$ et $k \geq 1$:

$$L_k(x)^2 \leq f_k(x) \leq f_k(1) = L_k(1)^2 = 1.$$

Donc $|L_k(x)| \leq 1$ sur $[0,1]$. Par parité, la même majoration vaut sur tout $[-1,1]$:

$$\forall x \in [-1,1], \qquad |L_k(x)| \leq 1.$$

IV — Relation entre L_{k-1}, L_k et L_{k+1}

Q38. Expression de a_k

Notons c_k le coefficient dominant de L_k. D'après la question 31 :

$$c_k = \frac{(2k)!}{2^k (k!)^2}.$$

Dans la question 14, $a_k = c_{k+1}/c_k$. Donc :

$$a_k = \frac{2k+1}{k+1}.$$

Q39. Récurrence à trois termes

La relation de la question 15 s'écrit :

$$L_{k+1} = (a_k X + b_k) L_k + c_k L_{k-1}.$$

Par parité, L_{k+1}, XL_k et L_{k-1} ont la même parité, tandis que L_k a la parité opposée ; donc $b_k=0$. En évaluant en 1 et en utilisant $L_j(1)=1$:

$$1 = a_k + c_k, \qquad c_k = 1 - \frac{2k+1}{k+1} = -\frac{k}{k+1}.$$

D'où :

$$L_{k+1} = \frac{2k+1}{k+1} X L_k - \frac{k}{k+1} L_{k-1}.$$

V — Développement en série entière

Q40. Rayon de convergence

Pour $x \in [-1,1]$, la question 37 donne $|L_k(x)| \leq 1$. La série $\sum L_k(x) t^k$ converge donc absolument pour $|t|<1$. Son rayon de convergence est donc au moins égal à 1.

Q41. Équation différentielle vérifiée par S

On pose $S(t) = \sum_{k\geq 0} L_k(x) t^k$. La relation de récurrence, écrite sous la forme

$$(k+1)L_{k+1} = (2k+1)xL_k - kL_{k-1},$$

est multipliée par t^k puis sommée pour $k \geq 1$. En utilisant $S'(t) = \sum_{k\geq 1} kL_k(x) t^{k-1}$, on obtient après simplification :

$$(1 - 2tx + t^2)S'(t) + (t - x)S(t) = 0.$$

Q42. Somme de la série génératrice

Sur $]-1,1[$, le facteur $1-2tx+t^2$ est strictement positif. L'équation précédente se réécrit :

$$\frac{S'(t)}{S(t)} = \frac{x-t}{1-2tx+t^2} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\ln(1-2tx+t^2)\right).$$

Ainsi $S(t) = C/\sqrt{1-2tx+t^2}$. Comme $S(0) = L_0(x) = 1$, on a $C = 1$. Donc :

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} L_k(x) t^k = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}.$$