Corrigé complet – Concours G2E 2026

Mathématiques

1. Problème 1

Partie A : calcul d'une intégrale

1. On considère

$$\varphi(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \qquad \psi(t) = \frac{t}{t^2+1} + \arctan(t), \qquad t \in [1, +\infty[.$$

(a) Les fonctions rationnelles intervenant dans φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ car $t^2+1>0$ sur cet intervalle. De plus, arctan est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi φ et ψ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$.

On calcule

$$\varphi'(t) = \frac{2t(t^2+1) - 2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2} = \frac{4t}{(t^2+1)^2}.$$

De même,

$$\left(\frac{t}{t^2+1}\right)' = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$$

et

$$(\arctan t)' = \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2+1}{(t^2+1)^2}.$$

Donc

$$\boxed{\psi'(t) = \frac{2}{(t^2+1)^2}}.$$

(b) Pour tout $t \geq 1$,

$$\varphi'(t) = \frac{4t}{(t^2+1)^2} > 0.$$

Donc φ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Enfin,

$$\varphi(1) = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2-1}{t^2+1} = 1.$$

Ainsi φ réalise une bijection strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $[0, 1[$.

2. On note $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ et

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

(a) Pour $A > 1$, la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante sur $[1, A]$, et envoie $[1, A]$ sur $[0, \varphi(A)]$. On peut donc effectuer le changement de variable $x = \varphi(t)$:

$$\int_0^{\varphi(A)} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_1^A \sqrt{1-\varphi(t)^2}\,\varphi'(t)\,dt.$$

Or, pour $t \geq 1$,

$$1-\varphi(t)^2 = 1 - \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2 = \frac{(t^2+1)^2-(t^2-1)^2}{(t^2+1)^2} = \frac{4t^2}{(t^2+1)^2}.$$

Comme $t \geq 1$,
$$\sqrt{1-\varphi(t)^2} = \frac{2t}{t^2+1}.$$
Ainsi
$$\sqrt{1-\varphi(t)^2}\,\varphi'(t) = \frac{2t}{t^2+1} \cdot \frac{4t}{(t^2+1)^2} = \frac{8t^2}{(t^2+1)^3}.$$
Comme $\varphi(A) \to 1$ lorsque $A \to +\infty$ et que f est continue sur $[0,1]$, on obtient, par passage à la limite,
$$\boxed{I = \int_1^{+\infty} \frac{8t^2}{(t^2+1)^3}\,dt}.$$

(b) Posons
$$v(t) = \frac{1}{(t^2+1)^2}.$$
Alors
$$v'(t) = -\frac{4t}{(t^2+1)^3},$$
d'où
$$\frac{8t^2}{(t^2+1)^3} = -2t\,v'(t).$$
Pour $A > 1$,
$$\int_1^A \frac{8t^2}{(t^2+1)^3}\,dt = \int_1^A -2t\,v'(t)\,dt.$$
Par intégration par parties,
$$\int_1^A -2t\,v'(t)\,dt = [-2tv(t)]_1^A + 2\int_1^A v(t)\,dt.$$
Or
$$\lim_{A\to+\infty} \frac{-2A}{(A^2+1)^2} = 0, \qquad \frac{-2}{(1^2+1)^2} = -\frac{1}{2}.$$
Donc
$$\boxed{I = \frac{1}{2} + 2\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^2}}.$$

(c) D'après la question 1,
$$\psi'(t) = \frac{2}{(t^2+1)^2}.$$
Donc
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\,[\psi(t)]_1^{+\infty}.$$
Or
$$\lim_{t\to+\infty} \psi(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{t^2+1} + \lim_{t\to+\infty} \arctan(t) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$
et
$$\psi(1) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$
Ainsi
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$
Par conséquent
$$I = \frac{1}{2} + 2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Finalement,

$$\boxed{I = \frac{\pi}{4}}.$$

3. **(a)** Le cercle $\mathcal{C}$ de centre l'origine et de rayon 1 a pour équation cartésienne

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1}.$$

Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$x^2 + f(x)^2 = x^2 + \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 = 1.$$

Donc tout point $(x, f(x))$ de la courbe représentative de f appartient au cercle $\mathcal{C}$.

(b) La courbe de f sur $[0, 1]$ est le quart supérieur droit du cercle unité. L'intégrale I représente donc l'aire du quart de disque unité. Comme l'aire du disque unité vaut π, on obtient

$$\boxed{I = \frac{\pi}{4}}.$$

Partie B : dénombrement de points dans un disque

4. Pour $n = 1$,

$$D_1 = \{(0, 0), (1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\},$$

donc

$$\boxed{\mathrm{Card}(D_1) = 5}.$$

Par ailleurs, aucun couple $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ne vérifie $x^2 + y^2 \leq 1$, donc

$$\boxed{\mathrm{Card}(Q_1) = 0}.$$

Pour Q_3, on cherche les couples $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $x^2 + y^2 \leq 9$. Les possibilités sont

$$(1, 1),\ (1, 2),\ (2, 1),\ (2, 2).$$

Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Card}(Q_3) = 4}.$$

5. **(a)** Les points de D_n se répartissent en trois catégories :

— le point central $(0, 0)$;

— les points situés sur les axes : $(\pm k, 0)$ et $(0, \pm k)$ pour $1 \leq k \leq n$, soit $4n$ points ;

— les points dont les deux coordonnées sont non nulles. Par symétrie par rapport aux axes, ces points sont répartis équitablement dans les quatre quadrants, et le premier quadrant en contient exactement $\mathrm{Card}(Q_n)$.

Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{Card}(D_n) = 1 + 4n + 4\,\mathrm{Card}(Q_n)}.$$

(b) Fixons $x \in \mathbb{N}^*$. Pour avoir $(x, y) \in Q_n$, il faut et il suffit que

$$y \in \mathbb{N}^*, \qquad y^2 \leq n^2 - x^2.$$

Si $x \geq n$, alors $n^2 - x^2 \leq 0$ et aucun $y \in \mathbb{N}^*$ ne convient. On peut donc se limiter à $1 \leq x \leq n - 1$.

Pour un tel x, le nombre de valeurs possibles de y est

$$\left\lfloor \sqrt{n^2 - x^2} \right\rfloor.$$

Par sommation sur x, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{Card}(Q_n) = \sum_{x=1}^{n-1} \left\lfloor \sqrt{n^2 - x^2} \right\rfloor}.$$

(c) Pour tout réel t, on a

$$t - 1 < \lfloor t \rfloor \leq t,$$

donc, en particulier,

$$\sqrt{n^2 - x^2} - 1 \leq \left\lfloor \sqrt{n^2 - x^2} \right\rfloor \leq \sqrt{n^2 - x^2}.$$

En sommant de $x = 1$ à $n - 1$, puis en remarquant que le terme d'indice $x = n$ vaut 0, on obtient

$$\sum_{x=1}^{n-1} \sqrt{n^2 - x^2} - (n - 1) \leq \mathrm{Card}(Q_n) \leq \sum_{x=1}^{n-1} \sqrt{n^2 - x^2}.$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 1 - n + \sum_{x=1}^{n} \sqrt{n^2 - x^2} \leq \mathrm{Card}(Q_n) \leq \sum_{x=1}^{n} \sqrt{n^2 - x^2}}.$$

6. On pose

$$R_n = \frac{1}{n^2} \sum_{x=1}^{n} \sqrt{n^2 - x^2}.$$

(a) On écrit

$$\sqrt{n^2 - x^2} = n\sqrt{1 - \left(\frac{x}{n}\right)^2}.$$

Donc

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{n}\right)^2}.$$

Il s'agit de la somme de Riemann à droite associée à la fonction

$$g : t \longmapsto \sqrt{1 - t^2}$$

sur le segment $[0, 1]$.

(b) La fonction g est continue sur $[0, 1]$. Donc la suite (R_n) converge vers

$$\int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\, dt.$$

D'après la partie A, cette intégrale vaut $\pi/4$. Ainsi

$$\boxed{R_n \longrightarrow \frac{\pi}{4}}.$$

(c) Les inégalités de la question 5(c) se réécrivent

$$1 - n + n^2 R_n \leq \mathrm{Card}(Q_n) \leq n^2 R_n.$$

En divisant par n^2,

$$R_n + \frac{1-n}{n^2} \leq \frac{\mathrm{Card}(Q_n)}{n^2} \leq R_n.$$

Comme

$$R_n \to \frac{\pi}{4} \qquad \text{et} \qquad \frac{1-n}{n^2} \to 0,$$

le théorème d'encadrement donne

$$\frac{\mathrm{Card}(Q_n)}{n^2} \to \frac{\pi}{4}.$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{Card}(Q_n) \sim \frac{\pi}{4} n^2}.$$

Enfin,

$$\mathrm{Card}(D_n) = 1 + 4n + 4\,\mathrm{Card}(Q_n).$$

Or $1 + 4n = o(n^2)$ et $4\,\mathrm{Card}(Q_n) \sim \pi n^2$, donc

$$\boxed{\mathrm{Card}(D_n) \sim \pi n^2}.$$

Partie C : convergence en loi

7. **(a)** La variable X_n suit la loi uniforme sur $\{-n, -n+1, \dots, n\}$. Par symétrie,

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = 0}.$$

(b) Comme $\mathbb{E}(X_n) = 0$,

$$\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2).$$

Or

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} k^2 = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

En utilisant

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

on obtient

$$\mathbb{V}(X_n) = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{3}.$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{V}(X_n) = \frac{n(n+1)}{3}}.$$

8. **(a)** Pour tout n, la variable Z_n est une fonction du couple (X_n, Y_n) :

$$Z_n = \mathbf{1}_{\{X_n^2 + Y_n^2 \leq n^2\}}.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, les variables $X_1, \dots, X_N, Y_1, \dots, Y_N$ sont mutuellement indépendantes. Les couples $(X_1, Y_1), \dots, (X_N, Y_N)$ sont donc indépendants, et des fonctions de couples indépendants restent indépendantes. Ainsi les variables $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes.

(b) Le couple (X_n, Y_n) est uniforme sur l'ensemble

$$\{-n, \dots, n\}^2,$$

qui contient $(2n+1)^2$ couples. L'événement $\{Z_n = 1\}$ correspond exactement aux couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$x^2 + y^2 \leq n^2,$$

c'est-à-dire aux éléments de D_n. Donc

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) = \frac{\mathrm{Card}(D_n)}{(2n+1)^2}.$$

Ainsi

$$\boxed{Z_n \sim \mathcal{B}\left(\frac{\mathrm{Card}(D_n)}{(2n+1)^2}\right)}.$$

9. **(a)** Pour des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, une suite (W_n) converge en loi vers W si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(W_n = k) \longrightarrow \mathbb{P}(W = k).$$

(b) Posons

$$p_n = \frac{\mathrm{Card}(D_n)}{(2n+1)^2}.$$

D'après la partie B,

$$\mathrm{Card}(D_n) \sim \pi n^2, \qquad (2n+1)^2 \sim 4n^2.$$

Donc

$$p_n \longrightarrow \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) = p_n \to \frac{\pi}{4}, \qquad \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - p_n \to 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Par la caractérisation précédente, (Z_n) converge en loi vers une variable Z suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\pi/4$:

$$\boxed{Z \sim \mathcal{B}\left(\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Ses caractéristiques usuelles sont

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) = \frac{\pi}{4}}, \qquad \boxed{\mathbb{V}(Z) = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi(4-\pi)}{16}}.$$

10. Notons

$$\overline{Z}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k.$$

(a) Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(\overline{Z}_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Z_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k.$$

Comme $p_k \to \pi/4$, le théorème de Cesàro donne

$$\boxed{\mathbb{E}(\overline{Z}_n) \longrightarrow \frac{\pi}{4}}.$$

(b) Les variables Z_k sont indépendantes, donc

$$\mathbb{V}(\overline{Z}_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(Z_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}p_k(1-p_k).$$

Or

$$p_k(1-p_k) \longrightarrow \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

D'après le théorème de Cesàro,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_k(1-p_k) \longrightarrow \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

Par conséquent

$$\mathbb{V}(\overline{Z}_n) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_k(1-p_k)\right) \longrightarrow 0.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{V}(\overline{Z}_n) \longrightarrow 0}.$$

2. Problème 2

Partie A : matrices de carré nul

1. **(a)** On vérifie que

$$S^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad U^2 = 0,$$

tandis que

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Les matrices de carré nul sont donc

$$\boxed{S \text{ et } U}.$$

(b) Soit λ une valeur propre de A et soit $X \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors

$$AX = \lambda X.$$

En appliquant A une seconde fois,

$$A^2 X = \lambda^2 X.$$

Or $A^2 = O_n$, donc

$$\lambda^2 X = 0.$$

Comme $X \neq 0$, on obtient $\lambda^2 = 0$, donc

$$\boxed{\lambda = 0}.$$

(c) Supposons que A soit symétrique et que $A^2 = O_n$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$0 = X^T A^2 X = X^T A^T A X = (AX)^T (AX) = \|AX\|^2.$$

Donc $AX = 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. Ainsi

$$\boxed{A = O_n}.$$

2. On considère $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $m \in \{1, 2, 3\}$ vérifiant $A^m = O_2$.

(a) Si $m = 1$, alors $A = O_2$, donc $A^2 = O_2$. Si $m = 2$, alors directement $A^2 = O_2$. Ainsi, si $m < 3$, A est de carré nul.

(b) Supposons maintenant $m = 3$ et $A^2 \neq O_2$. La matrice A^2 est donc non nulle. L'application linéaire associée à A^2 n'est pas nulle, donc il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$\boxed{A^2 X \neq 0}.$$

(c) Montrons que la famille (X, AX, A^2X) est libre. Supposons que

$$\alpha X + \beta AX + \gamma A^2 X = 0.$$

En appliquant A^2 et en utilisant $A^3 = O_2$, on obtient

$$\alpha A^2 X = 0.$$

Comme $A^2 X \neq 0$, on a $\alpha = 0$.

L'égalité devient
$$\beta AX + \gamma A^2X = 0.$$
En appliquant A,
$$\beta A^2X = 0,$$
donc $\beta = 0$. Enfin, il reste
$$\gamma A^2X = 0,$$
donc $\gamma = 0$.

La famille (X, AX, A^2X) est donc libre. C'est impossible dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, qui est de dimension 2. La supposition $A^2 \neq O_2$ est donc fausse. Ainsi
$$\boxed{A^2 = O_2}.$$

3. Supposons que $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que MN soit de carré nul. Alors
$$(MN)^2 = O_2.$$
On calcule
$$(NM)^3 = NMNMNM = N(MNMN)M = N(MN)^2M = O_2.$$
Ainsi la matrice $NM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $(NM)^3 = O_2$. D'après la question précédente appliquée à $A = NM$ et $m = 3$, on en déduit
$$\boxed{(NM)^2 = O_2}.$$
Donc NM est aussi de carré nul.

Partie B : endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de carré nul

On fixe un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^2 = 0$.

4. Si $u = 0$, alors dans n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$,
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
On obtient donc la forme demandée avec
$$\boxed{\varepsilon = 0}.$$

5. On suppose désormais que $u \neq 0$.

(a) Comme $u \neq 0$, il existe $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(a) \neq 0$. Montrons que $(u(a), a)$ est libre.

Si cette famille était liée, comme $u(a) \neq 0$, il existerait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$u(a) = \lambda a.$$
En appliquant u,
$$u^2(a) = \lambda u(a).$$
Or $u^2(a) = 0$, donc $\lambda u(a) = 0$. Puisque $u(a) \neq 0$, on obtient $\lambda = 0$, d'où $u(a) = 0$, contradiction.

Donc il existe $a \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$\boxed{(u(a), a) \text{ est libre}}.$$

(b) Une famille libre de deux vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3 peut être complétée en une base. Il existe donc $e \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\boxed{\mathcal{A} = (u(a), a, e) \text{ soit une base de } \mathbb{R}^3}.$$

(c) Dans la base $\mathcal{A} = (u(a), a, e)$, on a

$$a = 0 \cdot u(a) + 1 \cdot a + 0 \cdot e,$$

donc

$$\boxed{a_1 = 0}.$$

De même,

$$u(a) = 1 \cdot u(a) + 0 \cdot a + 0 \cdot e,$$

donc

$$\boxed{u(a)_1 = 1}.$$

6. On considère l'application linéaire

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad x \longmapsto (x_1, u(x)_1),$$

où les coordonnées sont prises dans la base $\mathcal{A}$.

(a) On calcule

$$\varphi(u(a)) = (u(a)_1, u^2(a)_1) = (1, 0),$$

et

$$\varphi(a) = (a_1, u(a)_1) = (0, 1).$$

Les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ engendrent $\mathbb{R}^2$, donc

$$\boxed{\mathrm{rg}(\varphi) = 2}.$$

Par le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = 3 - 2 = 1.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) \text{ est une droite vectorielle de } \mathbb{R}^3}.$$

(b) Soit $e' \neq 0$ un vecteur directeur de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Montrons que

$$\mathcal{B} = (u(a), e', a)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

Supposons

$$\alpha u(a) + \beta e' + \gamma a = 0.$$

En appliquant φ, et comme $e' \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on obtient

$$\alpha(1, 0) + \gamma(0, 1) = 0.$$

Donc $\alpha = 0$ et $\gamma = 0$. Il reste alors $\beta e' = 0$, donc $\beta = 0$ car $e' \neq 0$.

La famille $(u(a), e', a)$ est libre. Comme elle contient trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, elle est une base :

$$\boxed{\mathcal{B} = (u(a), e', a) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}.$$

(c) Comme $e' \in \mathrm{Ker}(\varphi)$,
$$e'_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad u(e')_1 = 0.$$
Alors
$$\varphi(u(e')) = (u(e')_1, u^2(e')_1) = (0,0),$$
puisque $u^2 = 0$. Donc
$$u(e') \in \mathrm{Ker}(\varphi).$$
Comme $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est une droite dirigée par e', il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$u(e') = \lambda e'.$$
En appliquant u,
$$0 = u^2(e') = \lambda u(e') = \lambda^2 e'.$$
Comme $e' \neq 0$, on a $\lambda = 0$. Ainsi
$$\boxed{u(e') = 0}.$$

(d) Dans la base
$$\mathcal{B} = (u(a), e', a),$$
on a
$$u(u(a)) = u^2(a) = 0, \qquad u(e') = 0, \qquad u(a) = u(a).$$
Les colonnes de la matrice de u dans $\mathcal{B}$ sont donc respectivement
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Ainsi
$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$
ce qui est la forme demandée avec $\varepsilon = 1$.

Partie C : avec un dé

7. **(a)** On note $G = X_1 + 1$ le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier six. Alors G suit une loi géométrique de paramètre
$$p = \frac{1}{6}$$
sur $\mathbb{N}^*$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(X_1 = n) = \mathbb{P}(G = n+1) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^n \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^n \frac{1}{6}.$$
Donc
$$\boxed{X_1(\Omega) = \mathbb{N}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_1 = n) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n}.$$
Pour une loi géométrique $G \sim \mathcal{G}(p)$ sur $\mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{E}(G) = \frac{1}{p}, \qquad \mathbb{V}(G) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Comme $X_1 = G - 1$, on obtient

$$\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(G) - 1 = 6 - 1 = 5,$$

et

$$\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(G) = \frac{5/6}{(1/6)^2} = 30.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X_1) = 5, \qquad \mathbb{V}(X_1) = 30}.$$

(b) Les variables $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ sont indépendantes et de même loi que X_1. En effet, après chaque apparition de la face 6, les lancers suivants sont indépendants des précédents et l'expérience recommence avec la même probabilité de succès $1/6$.

Ainsi,

$$\boxed{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \text{ sont indépendantes et identiquement distribuées}}.$$

8. **(a)** Par indépendance,

$$\mathbb{P}(X_1 = X_4 = X_6 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_4 = 0)\mathbb{P}(X_6 = 0).$$

Or, pour chaque i,

$$\mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{1}{6}.$$

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 = X_4 = X_6 = 0) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}}.$$

(b) Par indépendance,

$$\mathbb{P}(X_2 = 0 \cup X_5 = 0) = \mathbb{P}(X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_5 = 0) - \mathbb{P}(X_2 = 0 \cap X_5 = 0).$$

Donc

$$\mathbb{P}(X_2 = 0 \cup X_5 = 0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}(X_2 = 0 \cup X_5 = 0) = \frac{11}{36}}.$$

9. On considère

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ 0 & X_4 & X_5 \\ 0 & 0 & X_6 \end{pmatrix}.$$

Si $A^2 = 0$, alors les coefficients diagonaux de A^2 sont nuls. Or ils valent

$$X_1^2, \qquad X_4^2, \qquad X_6^2.$$

Comme les X_i sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, cela impose

$$X_1 = X_4 = X_6 = 0.$$

Sous cette condition,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & X_2 & X_3 \\ 0 & 0 & X_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et un calcul donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_2X_5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $A^2 = 0$ si et seulement si

$$X_1 = X_4 = X_6 = 0 \qquad \text{et} \qquad X_2X_5 = 0.$$

Autrement dit,

$$\{A^2 = 0\} = \{X_1 = X_4 = X_6 = 0\} \cap \big(\{X_2 = 0\} \cup \{X_5 = 0\}\big).$$

Les variables $X_1, \dots, X_6$ étant indépendantes,

$$\mathbb{P}(A^2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = X_4 = X_6 = 0)\,\mathbb{P}(X_2 = 0 \cup X_5 = 0).$$

D'après les questions précédentes,

$$\mathbb{P}(A^2 = 0) = \frac{1}{216} \cdot \frac{11}{36}.$$

Finalement,

$$\boxed{\mathbb{P}(A^2 = 0) = \frac{11}{7776}}.$$