

Excellence Maths

---

# Concours Geipi Polytech

## Correction détaillée

Mathématiques – QCM et Mathématiques spécialité

Correction rédigée avec un niveau Terminale spécialité mathématiques :  
calculs détaillés, justifications essentielles et méthode de rédaction.

## Table récapitulative des réponses du QCM

Exercice	A	B	C	D	E
I	Vrai	Faux	Faux	Vrai	–
II	Vrai	Faux	Faux	Vrai	Vrai
III	Faux	Faux	Vrai	–	–
IV	Faux	Vrai	Faux	–	–
V	Faux	Faux	Faux	–	–
VI	Vrai	Faux	Faux	Vrai	–
VII	Faux	–	–	–	–
VIII	Faux	–	–	–	–
IX	Vrai	Vrai	Vrai	–	–

### À retenir pour le QCM

Une affirmation est vraie seulement si elle est vraie exactement comme énoncée. Un seul contre-exemple suffit à montrer qu'une affirmation universelle est fausse.

## Correction détaillée du QCM

### Exercice I – Calculs

**I-A.** On rationalise le dénominateur :

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{2-2\sqrt{2}+1}{2-1} = 3-2\sqrt{2}.$$

Donc l'affirmation est **Vrai**.

**I-B.** Pour tout réel  $u$ ,  $\sqrt{u^2} = |u|$ . Ici  $\sqrt{3}-2 < 0$ , donc

$$\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = |\sqrt{3}-2| = 2-\sqrt{3} \neq \sqrt{3}-2.$$

L'affirmation est **Faux**.

**I-C.** Pour  $n = 2$ , par exemple,

$$\frac{1}{2 \times 2^2} - \frac{1}{4^2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \neq 0.$$

La propriété n'est donc pas vraie pour tout entier naturel non nul  $n$ . L'affirmation est **Faux**.

**I-D.** On écrit  $2025 = 2026 - 1$  et  $2027 = 2026 + 1$ . Alors

$$2025^2 + 2027^2 - 2 = (2026 - 1)^2 + (2026 + 1)^2 - 2 = 2 \times 2026^2.$$

Ainsi

$$\frac{2026^2}{2025^2 + 2027^2 - 2} = \frac{2026^2}{2 \times 2026^2} = \frac{1}{2}.$$

L'affirmation est **Vrai**.

### Exercice II – Développements, exponentielle et logarithme

**II-A.** On développe :

$$(6x+5)(6x-7) = 36x^2 - 12x - 35.$$

Donc

$$-(6x+5)(6x-7) + 36x^2 - 25 = -36x^2 + 12x + 35 + 36x^2 - 25 = 12x + 10 = 2(6x+5).$$

L'affirmation est **Vrai**.

**II-B.** On résout :

$$-2e^{2x+1} \leq -2e^5.$$

En divisant par  $-2$ , on change le sens de l'inégalité :

$$e^{2x+1} \geq e^5.$$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante,

$$2x+1 \geq 5 \iff x \geq 2.$$

L'ensemble des solutions est donc  $[2, +\infty[$ , et non  $] -\infty, 2]$ . L'affirmation est **Faux**.

**II-C.** On peut prendre  $x = 1$ . Alors

$$\ln(x^3 + x^2) = \ln(2), \quad \ln(x^2) \times \ln(x^3) = \ln(1) \times \ln(1) = 0.$$

Les deux membres ne sont pas égaux. L'affirmation est **Faux**.

**II-D.** Pour  $x > 0$ ,

$$x^3 + x^2 = x^2(x+1).$$

Comme  $x^2 > 0$  et  $x + 1 > 0$ , on a

$$\ln(x^3 + x^2) = \ln(x^2(x + 1)) = \ln(x^2) + \ln(x + 1) = 2\ln(x) + \ln(x + 1).$$

L'affirmation est **Vrai**.

**II-E.** Pour tous réels  $a$  et  $b$ ,

$$\frac{e^a + e^b}{e^{a+b}} = \frac{e^a}{e^{a+b}} + \frac{e^b}{e^{a+b}} = e^{-b} + e^{-a}.$$

Comme l'addition est commutative, cela vaut bien  $e^{-a} + e^{-b}$ . L'affirmation est **Vrai**.

### Exercice III – Équation $x^2 = a^2$

L'équation  $x^2 = a^2$  équivaut à

$$(x - a)(x + a) = 0.$$

Ses solutions sont donc  $x = a$  et  $x = -a$ . Si  $a \neq 0$ , il y a deux solutions distinctes ; si  $a = 0$ , il n'y a qu'une seule solution,  $x = 0$ .

**III-A.** Même si  $a < 0$ , les solutions  $a$  et  $-a$  existent. L'affirmation est **Faux**.

**III-B.** Pour  $a \neq 0$ ,  $a$  n'est pas l'unique solution, car  $-a$  est aussi solution. L'affirmation est **Faux**.

**III-C.** L'équation admet une unique solution seulement lorsque  $a = 0$ . Il existe donc une unique valeur de  $a$  convenable. L'affirmation est **Vrai**.

### Exercice IV – Asymptote horizontale

Dire que  $C_f$  admet en  $-\infty$  une asymptote d'équation  $y = -1$  signifie :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

**IV-A.** Une courbe peut admettre l'asymptote horizontale  $y = -1$  en  $-\infty$  tout en coupant cette droite. L'équation  $f(x) = -1$  peut donc avoir une solution. L'affirmation est **Faux**.

**IV-B.** C'est exactement la définition d'une asymptote horizontale en  $-\infty$ . L'affirmation est **Vrai**.

**IV-C.** Une information en  $-\infty$  ne donne pas une limite en  $-1$ . De plus,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$  est finie. L'affirmation est **Faux**.

### Exercice V – Fonction $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

La fonction est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

**V-A.** La courbe admet une asymptote verticale d'équation  $x = 1$ , pas  $x = 0$ . L'affirmation est **Faux**.

**V-B.** On dérive :

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Sur  $]1, +\infty[$ , on a  $1 - x < 0$ , donc  $(1 - x)^3 < 0$  et  $f'(x) < 0$ . La fonction est donc décroissante sur cet intervalle. L'affirmation est **Faux**.

**V-C.** Si  $F(x) = -\frac{1}{1-x}$ , alors

$$F'(x) = -\frac{1}{(1-x)^2} = -f(x).$$

Donc  $F$  n'est pas une primitive de  $f$  sur  $]1, +\infty[$ . L'affirmation est **Faux**.

**Exercice VI – Suite**  $u_n = (-1)^n$ 

**VI-A.** Pour tout  $n$ ,  $u_n \in \{-1, 1\}$ , donc la suite est bornée. L'affirmation est **Vrai**.

**VI-B.** Les sous-suites  $u_{2n} = 1$  et  $u_{2n+1} = -1$  ont deux limites différentes. La suite  $(u_n)$  ne converge pas. L'affirmation est **Faux**.

**VI-C.** La suite  $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  commence par

$$-1, \quad \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \dots$$

Elle n'est pas décroissante, car  $-1 < \frac{1}{2}$ . L'affirmation est **Faux**.

**VI-D.** Pour tout  $n$ ,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} = -1.$$

La suite  $\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$  est donc constante. L'affirmation est **Vrai**.

**Exercice VII – Lancers d'une pièce**

Pour obtenir exactement une fois face en quatre lancers, il faut choisir lequel des quatre lancers donne face, puis obtenir l'autre issue aux trois autres lancers. Ainsi

$$\mathbb{P}(\text{une seule fois face}) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

La probabilité n'est pas  $\frac{3}{4}$ . L'affirmation est **Faux**.

**Exercice VIII – Tirage de cartes sans remise**

Une loi binomiale modélise une répétition d'épreuves indépendantes avec la même probabilité de succès. Ici, le tirage se fait sans remise : les deux tirages ne sont pas indépendants. Par exemple,

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{16}{32} \times \frac{15}{31} = \frac{15}{62} \neq \frac{1}{4},$$

alors qu'une loi binomiale de paramètres 2 et  $\frac{1}{2}$  donnerait  $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4}$ . L'affirmation est **Faux**.

**Exercice IX – Géométrie dans le plan**

On considère  $A(1, -1)$ ,  $B(-2, 5)$  et  $C(3, 5)$ .

**IX-A.** Le coefficient directeur de  $(AB)$  vaut

$$\frac{5 - (-1)}{-2 - 1} = \frac{6}{-3} = -2.$$

Une équation de  $(AB)$  est donc

$$y + 1 = -2(x - 1) \iff 2x + y - 1 = 0.$$

L'affirmation est **Vrai**.

**IX-B.** Une droite perpendiculaire à  $(AB)$  a pour coefficient directeur  $\frac{1}{2}$ . La droite passant par  $C(3, 5)$  vérifie

$$y - 5 = \frac{1}{2}(x - 3) \iff x - 2y + 7 = 0.$$

L'affirmation est **Vrai**.

**IX-C.** On résout le système

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ x - 2y + 7 = 0. \end{cases}$$

La première équation donne  $y = 1 - 2x$ . En remplaçant dans la seconde :

$$x - 2(1 - 2x) + 7 = 0 \iff 5x + 5 = 0 \iff x = -1.$$

Alors  $y = 1 - 2(-1) = 3$ . Donc  $I(-1, 3)$ . L'affirmation est **Vrai**.

## Mathématiques spécialité – Exercice I

On travaille dans un repère orthonormé de l'espace. Le point est

$$A(2, -1, -1),$$

et la droite  $\mathcal{D}$  est définie par

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2t, \\ z = -1 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, pour tout réel  $t$ ,  $M_t(1 + t, 2t, -1 + t)$  appartient à  $\mathcal{D}$ .

### Questions préliminaires

**I-1.** Vérifions que  $A$  n'appartient pas à  $\mathcal{D}$ .

Si  $A$  appartenait à  $\mathcal{D}$ , il existerait  $t \in \mathbb{R}$  tel que

$$1 + t = 2, \quad 2t = -1, \quad -1 + t = -1.$$

La première égalité impose  $t = 1$ , tandis que la deuxième impose  $t = -\frac{1}{2}$ . C'est impossible. Donc

$$\boxed{A \notin \mathcal{D}.$$

**I-2.** En lisant les coefficients de  $t$  dans le système paramétrique, un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$  est

$$\boxed{\vec{u} = (1, 2, 1).$$

### Partie A – Première méthode : plan orthogonal

**I-3.** Le plan  $\mathcal{P}$  passe par  $A$  et est orthogonal à la droite  $\mathcal{D}$ . Un vecteur normal de  $\mathcal{P}$  est donc le vecteur directeur  $\vec{u} = (1, 2, 1)$  de  $\mathcal{D}$ .

Une équation de  $\mathcal{P}$  est donc

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0,$$

où  $M(x, y, z)$  est un point quelconque du plan. Ainsi

$$(1, 2, 1) \cdot (x - 2, y + 1, z + 1) = 0.$$

On obtient

$$x - 2 + 2(y + 1) + z + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{x + 2y + z + 1 = 0.}$$

**I-4.** Le point  $B$  est l'intersection de  $\mathcal{D}$  et de  $\mathcal{P}$ . On remplace donc dans l'équation du plan :

$$(1 + t) + 2(2t) + (-1 + t) + 1 = 0.$$

D'où

$$6t + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = -\frac{1}{6}.$$

Ainsi

$$B = M_{-1/6} = \left(1 - \frac{1}{6}, 2\left(-\frac{1}{6}\right), -1 - \frac{1}{6}\right),$$

donc

$$\boxed{B\left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{7}{6}\right).$$

**I-5.** On calcule  $AB^2$  :

$$AB^2 = \left(\frac{5}{6} - 2\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} + 1\right)^2 + \left(-\frac{7}{6} + 1\right)^2.$$

Donc

$$AB^2 = \left(-\frac{7}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{49}{36} + \frac{16}{36} + \frac{1}{36} = \frac{66}{36} = \boxed{\frac{11}{6}}.$$

## Partie B – Deuxième méthode : minimisation d'une fonction

**I-6.** On a

$$\overrightarrow{AM_t} = (1 + t - 2, 2t + 1, -1 + t + 1) = (t - 1, 2t + 1, t).$$

Donc

$$f(t) = AM_t^2 = (t - 1)^2 + (2t + 1)^2 + t^2.$$

En développant :

$$f(t) = t^2 - 2t + 1 + 4t^2 + 4t + 1 + t^2 = 6t^2 + 2t + 2.$$

Ainsi

$$\boxed{a = 6, \quad b = 2, \quad c = 2.}$$

**I-7-a.** La fonction  $f$  est une fonction polynôme du second degré avec  $a = 6 > 0$ . Elle admet donc un minimum pour

$$t_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}.$$

De plus,

$$f\left(-\frac{1}{6}\right) = 6 \times \frac{1}{36} + 2 \times \left(-\frac{1}{6}\right) + 2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + 2 = \frac{11}{6}.$$

Le tableau de variations est donc :

$t$	$-\infty$	$-\frac{1}{6}$	$+\infty$
$f(t)$		$\frac{11}{6}$	
	$\searrow$		$\nearrow$

**I-7-b.** On en déduit :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ admet un minimum en } -\frac{1}{6} \text{ qui vaut } \frac{11}{6}.$$

## Partie C – Troisième méthode : projection orthogonale

On considère  $M_0(1, 0, -1)$ , qui appartient à  $\mathcal{D}$ .

**I-8-a.** Les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AM_0}$  sont

$$\overrightarrow{AM_0} = (1 - 2, 0 - (-1), -1 - (-1)) = \boxed{(-1, 1, 0)}.$$

**I-8-b.** Sa longueur vaut

$$AM_0 = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \boxed{\sqrt{2}}.$$

**I-9.** Le point  $H$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur la droite  $\mathcal{D}$ . Comme  $H$  et  $M_0$  appartiennent tous les deux à  $\mathcal{D}$ , le vecteur  $\overrightarrow{HM_0}$  est colinéaire à un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ , ici  $\vec{u}$ .

Il existe donc un réel  $k$  tel que

$$\boxed{\overrightarrow{HM_0} = k\vec{u}.$$

**I-10-a.** On écrit

$$\overrightarrow{AM_0} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM_0}.$$

Comme  $H$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{D}$ , on a  $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$ , donc  $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$ . Par ailleurs,  $\overrightarrow{HM_0} = k\vec{u}$ . Ainsi

$$\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{u} = 0 + k\vec{u} \cdot \vec{u} = k\|\vec{u}\|^2.$$

Donc

$$k = \frac{\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}.$$

**I-10-b.** On calcule

$$\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{u} = (-1, 1, 0) \cdot (1, 2, 1) = -1 + 2 + 0 = 1,$$

et

$$\|\vec{u}\|^2 = 1^2 + 2^2 + 1^2 = 6.$$

Donc

$$k = \frac{1}{6}.$$

**I-10-c.** On a

$$HM_0 = \|\overrightarrow{HM_0}\| = \left\| \frac{1}{6}\vec{u} \right\| = \frac{1}{6}\|\vec{u}\| = \frac{1}{6}\sqrt{6}.$$

Ainsi

$$HM_0 = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

**I-11.** Le triangle  $AHM_0$  est rectangle en  $H$ . Par le théorème de Pythagore :

$$AM_0^2 = AH^2 + HM_0^2.$$

Donc

$$AH^2 = AM_0^2 - HM_0^2 = 2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 = 2 - \frac{1}{6} = \frac{11}{6}.$$

**I-12.** La distance cherchée  $\ell$  entre le point  $A$  et la droite  $\mathcal{D}$  est la longueur  $AH$ . Ainsi

$$\ell = AH = \sqrt{\frac{11}{6}} = \frac{\sqrt{66}}{6}.$$

## Mathématiques spécialité – Exercice II

On note :

$$M : \text{« l'animal est malade »}, \quad T : \text{« le test est positif »}.$$

On sait que

$$\mathbb{P}(M) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}_M(T) = \frac{9}{10}, \quad \mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{T}) = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(\overline{M}) = \frac{3}{4}.$$

**II-1.** On complète les probabilités conditionnelles :

$$\boxed{\mathbb{P}_M(T) = \frac{9}{10}}, \quad \boxed{\mathbb{P}_M(\overline{T}) = \frac{1}{10}},$$

car  $T$  et  $\overline{T}$  sont contraires. De même,

$$\boxed{\mathbb{P}_{\overline{M}}(\overline{T}) = \frac{4}{5}}, \quad \boxed{\mathbb{P}_{\overline{M}}(T) = \frac{1}{5}}.$$

**II-2.** D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(T) + \mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}_{\overline{M}}(T).$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(T) = \frac{1}{4} \times \frac{9}{10} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{9}{40} + \frac{3}{20} = \frac{9}{40} + \frac{6}{40} = \frac{15}{40} = \boxed{\frac{3}{8}}.$$

**II-3.** On cherche  $\mathbb{P}_T(M)$ , c'est-à-dire la probabilité que l'animal soit malade sachant que le test est positif. Par définition :

$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{\mathbb{P}(M \cap T)}{\mathbb{P}(T)}.$$

Or

$$\mathbb{P}(M \cap T) = \mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(T) = \frac{1}{4} \times \frac{9}{10} = \frac{9}{40}.$$

Donc

$$\mathbb{P}_T(M) = \frac{\frac{9}{40}}{\frac{3}{8}} = \frac{9}{40} \times \frac{8}{3} = \frac{72}{120} = \boxed{\frac{3}{5}}.$$

### Interprétation

Même si le test est plutôt fiable, la probabilité d'être malade sachant que le test est positif dépend aussi de la proportion d'animaux malades dans l'élevage.

## Mathématiques spécialité – Exercice III

On cherche les fonctions  $f$  vérifiant :

$$\begin{cases} f \text{ est définie, dérivable et ne s'annule pas sur } \mathbb{R}, \\ f(0) = \frac{1}{2}, \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x)^2 - f(x). \end{cases}$$

### III-1 – Unicité de la solution

On suppose que  $f$  est une solution du problème. On définit, pour tout réel  $x$ ,

$$h(x) = \left( \frac{1}{f(x)} - 1 \right) e^{-x}.$$

Cette fonction est bien définie car  $f$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ .

**III-1-a.** On utilise  $f(0) = \frac{1}{2}$  :

$$h(0) = \left( \frac{1}{f(0)} - 1 \right) e^0 = (2 - 1) \times 1 = \boxed{1}.$$

**III-1-b.** On dérive  $h$  comme produit. D'abord,

$$\left( \frac{1}{f(x)} - 1 \right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

Donc

$$h'(x) = \left( -\frac{f'(x)}{f(x)^2} \right) e^{-x} + \left( \frac{1}{f(x)} - 1 \right) (-e^{-x}).$$

Ainsi

$$h'(x) = e^{-x} \left[ -\frac{f'(x)}{f(x)^2} - \frac{1}{f(x)} + 1 \right].$$

Or  $f'(x) = f(x)^2 - f(x)$ , donc

$$-\frac{f'(x)}{f(x)^2} = -\frac{f(x)^2 - f(x)}{f(x)^2} = -\left( 1 - \frac{1}{f(x)} \right) = -1 + \frac{1}{f(x)}.$$

On remplace dans l'expression de  $h'(x)$  :

$$h'(x) = e^{-x} \left[ -1 + \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)} + 1 \right] = 0.$$

Donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = 0.}$$

**III-1-c.** Puisque  $h'(x) = 0$  pour tout réel  $x$ , la fonction  $h$  est constante sur  $\mathbb{R}$ . Comme  $h(0) = 1$ , on obtient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = 1.}$$

**III-1-d.** Pour tout réel  $x$ ,

$$\left( \frac{1}{f(x)} - 1 \right) e^{-x} = 1.$$

En multipliant par  $e^x$ , on obtient

$$\frac{1}{f(x)} - 1 = e^x.$$

Donc

$$\frac{1}{f(x)} = e^x + 1,$$

et finalement

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{e^x + 1}.}$$

Ainsi, si une solution existe, elle est nécessairement égale à cette fonction : cela prouve l'unicité éventuelle.

### III-2 – Vérification de l'existence

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{e^x + 1}.$$

Elle est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , car  $e^x + 1 > 0$  pour tout réel  $x$ . De plus, elle ne s'annule pas, car son numérateur vaut 1.

On vérifie la condition initiale :

$$f(0) = \frac{1}{e^0 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Enfin, on calcule la dérivée :

$$f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

D'autre part,

$$f(x)^2 - f(x) = \frac{1}{(e^x + 1)^2} - \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1 - (e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

Ainsi

$$f'(x) = f(x)^2 - f(x).$$

La fonction proposée est donc bien solution.

Le problème admet une unique solution :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{e^x + 1}.$$