

Correction annotée - Sujet de bac de mathématiques

Sujet 26-MATJ2ME1 - Spécialité mathématiques

Correction détaillée avec conseils de rédaction et remarques de méthode.

Table des matières

1	Exercice 1 - Géométrie dans l'espace	2
2	Exercice 2 - Suites et équation différentielle	6
2.1	Partie A - Modèle discret	6
2.2	Partie B - Modèle continu	7
3	Exercice 3 - Probabilités et dénombrement	10
4	Exercice 4 - Fonction, primitives et modélisation	12
4.1	Partie A - Lecture graphique	12
4.2	Partie B - Étude de la fonction	13
4.3	Partie C - Aire et volume	15
5	Synthèse des réflexes de rédaction	16

1 Exercice 1 - Géométrie dans l'espace

On considère les points

$$A(2, 1, 1), \quad B(3, -2, 0), \quad C(0, -1, 1), \quad D(0, 0, 2).$$

1. Montrer que A , B et C définissent un plan

On calcule deux vecteurs issus de A :

$$\overrightarrow{AB} = (1, -3, -1), \quad \overrightarrow{AC} = (-2, -2, 0).$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : par exemple, si $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$, alors la troisième coordonnée donnerait $-1 = 0$, ce qui est impossible.

Donc les points A , B et C ne sont pas alignés. Ils définissent donc un plan, noté (ABC) .

Conseil de rédaction

Pour montrer que trois points définissent un plan, il suffit de montrer qu'ils ne sont pas alignés. En pratique, on calcule deux vecteurs et on montre qu'ils ne sont pas colinéaires.

2.a. Montrer que $\vec{n} = (1, -1, 4)$ est normal au plan (ABC)

On vérifie que \vec{n} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 1 + (-1)(-3) + 4(-1) = 1 + 3 - 4 = 0,$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1(-2) + (-1)(-2) + 4 \times 0 = -2 + 2 = 0.$$

Ainsi \vec{n} est orthogonal à \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} , qui dirigent le plan (ABC) . Donc \vec{n} est un vecteur normal au plan (ABC) .

2.b. Équation cartésienne du plan (ABC)

Un plan de vecteur normal $\vec{n} = (1, -1, 4)$ admet une équation de la forme

$$x - y + 4z + d = 0.$$

Comme $A(2, 1, 1)$ appartient au plan, ses coordonnées vérifient l'équation :

$$2 - 1 + 4 + d = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d = -5.$$

Donc une équation cartésienne de (ABC) est

$$\boxed{x - y + 4z - 5 = 0.}$$

Conseil de rédaction

La phrase à écrire est : « Comme \vec{n} est un vecteur normal au plan, une équation du plan est de la forme $x - y + 4z + d = 0$. On détermine d en utilisant un point du plan. »

3. Représentation paramétrique de la droite Δ

La droite Δ passe par $D(0, 0, 2)$ et est orthogonale au plan (ABC) . Elle a donc pour vecteur directeur un vecteur normal au plan, par exemple $\vec{n} = (1, -1, 4)$.

Ainsi une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 0 + t, \\ y = 0 - t, \\ z = 2 + 4t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

C'est bien la représentation proposée :

$$\begin{cases} x = t, \\ y = -t, \\ z = 2 + 4t. \end{cases}$$

4. Projeté orthogonal de D sur le plan (ABC)

Le projeté orthogonal H de D sur le plan (ABC) appartient à la droite Δ et au plan (ABC) .

Un point de Δ a pour coordonnées

$$(t, -t, 2 + 4t).$$

On impose qu'il appartienne au plan (ABC) :

$$t - (-t) + 4(2 + 4t) - 5 = 0.$$

Donc

$$2t + 8 + 16t - 5 = 0 \iff 18t + 3 = 0 \iff t = -\frac{1}{6}.$$

On obtient donc

$$H\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 2 + 4\left(-\frac{1}{6}\right)\right) = H\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{4}{3}\right).$$

Ainsi

$$H\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{4}{3}\right).$$

Méthode

Pour trouver un projeté orthogonal sur un plan : on écrit la droite passant par le point et orthogonale au plan, puis on cherche son intersection avec le plan.

5.a. Montrer que ABC est isocèle en B

On calcule les longueurs BA et BC .

$$BA^2 = (2 - 3)^2 + (1 + 2)^2 + (1 - 0)^2 = 1 + 9 + 1 = 11.$$

$$BC^2 = (0 - 3)^2 + (-1 + 2)^2 + (1 - 0)^2 = 9 + 1 + 1 = 11.$$

Donc $BA^2 = BC^2$, donc $BA = BC$. Le triangle ABC est donc isocèle en B .

5.b. Aire du triangle ABC

On a déjà

$$AB = BC = \sqrt{11}.$$

Calculons aussi

$$AC^2 = (0 - 2)^2 + (-1 - 1)^2 + (1 - 1)^2 = 4 + 4 = 8,$$

soit

$$AC = 2\sqrt{2}.$$

Comme ABC est isocèle en B , la hauteur issue de B coupe $[AC]$ en son milieu M . Alors

$$AM = \frac{AC}{2} = \sqrt{2}.$$

Dans le triangle rectangle ABM ,

$$BM^2 = AB^2 - AM^2 = 11 - 2 = 9,$$

donc

$$BM = 3.$$

L'aire du triangle ABC vaut alors

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times AC \times BM = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3 = 3\sqrt{2}.$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{A}_{ABC} = 3\sqrt{2}.}$$

Conseil de rédaction

Pour une aire de triangle dans l'espace, il faut se ramener à de la géométrie plane : ici, le triangle est isocèle, donc la hauteur est aussi médiane.

6.a. Volume du tétraèdre $ABCD$

On prend pour base le triangle ABC . La hauteur associée est la distance de D au plan (ABC) , c'est-à-dire DH .

On calcule

$$\overrightarrow{DH} = \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{4}{3} - 2\right) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{2}{3}\right).$$

Donc

$$DH^2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{9} = \frac{2}{36} + \frac{16}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$DH = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Le volume vaut alors

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times DH = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

Donc

$$\boxed{V = 1.}$$

6.b. Aire du triangle BCD

On prend cette fois pour base le triangle BCD . La hauteur relative à cette base est la distance de A au plan (BCD) , donnée par l'énoncé : $\sqrt{2}$.

Donc

$$1 = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{BCD} \times \sqrt{2}.$$

Ainsi

$$\mathcal{A}_{BCD} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{A}_{BCD} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.}$$

7.a. Coplanarité de A , B , C et D_k

Le point D_k a pour coordonnées $(0, 0, k)$. Il est coplanaire avec A , B et C si et seulement s'il appartient au plan (ABC) .

On remplace donc dans l'équation du plan :

$$0 - 0 + 4k - 5 = 0.$$

Donc

$$4k = 5 \iff k = \frac{5}{4}.$$

Ainsi

$$\boxed{k = \frac{5}{4}}.$$

Dans ce cas, D_k appartient déjà au plan (ABC) . Son projeté orthogonal sur le plan est donc lui-même :

$$\boxed{D_k \left(0, 0, \frac{5}{4} \right)}.$$

7.b. Peut-on avoir A comme projeté orthogonal de D_k ?

Si A était le projeté orthogonal de D_k sur le plan (ABC) , alors la droite $(D_k A)$ serait orthogonale au plan (ABC) . Donc le vecteur $\overrightarrow{AD_k}$ serait colinéaire à un vecteur normal du plan, par exemple $\vec{n} = (1, -1, 4)$.

Or

$$\overrightarrow{AD_k} = D_k - A = (-2, -1, k - 1).$$

On cherche donc s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$(-2, -1, k - 1) = \lambda(1, -1, 4).$$

La première coordonnée donne $\lambda = -2$. La deuxième donnerait alors

$$-1 = -\lambda = 2,$$

ce qui est impossible.

Il n'existe donc aucune valeur de k telle que A soit le projeté orthogonal de D_k sur le plan (ABC) .

Aucune valeur de k ne convient.

Point de vigilance

Ne pas seulement dire « on ne trouve pas ». Il faut produire une contradiction claire : ici, les deux premières coordonnées imposent deux valeurs incompatibles de λ .

2 Exercice 2 - Suites et équation différentielle

2.1 Partie A - Modèle discret

On a $V_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n ,

$$V_{n+1} = 0,995V_n + 6.$$

1. Calcul de V_1 et V_2

$$V_1 = 0,995V_0 + 6 = 0 + 6 = 6.$$

Puis

$$V_2 = 0,995V_1 + 6 = 0,995 \times 6 + 6 = 5,97 + 6 = 11,97.$$

Donc

$$\boxed{V_1 = 6 \quad \text{et} \quad V_2 = 11,97.}$$

2. Programme Python

Le programme complété est :

```
def volume(n):    v = 0    for k in range(n):        v = 0.995*v + 6    return v
```

Conseil de rédaction

La boucle est exécutée n fois. On part donc de $V_0 = 0$, puis on applique n fois la relation de récurrence.

3. Montrer par récurrence que $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$

On veut montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$V_n \leq V_{n+1} \leq 1200.$$

Initialisation. Pour $n = 0$:

$$V_0 = 0, \quad V_1 = 6.$$

On a bien

$$0 \leq 6 \leq 1200.$$

La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons qu'à un rang n , on ait

$$V_n \leq V_{n+1} \leq 1200.$$

Montrons que

$$V_{n+1} \leq V_{n+2} \leq 1200.$$

D'abord,

$$V_{n+2} - V_{n+1} = (0,995V_{n+1} + 6) - V_{n+1} = 6 - 0,005V_{n+1}.$$

Comme $V_{n+1} \leq 1200$,

$$0,005V_{n+1} \leq 6,$$

donc

$$6 - 0,005V_{n+1} \geq 0.$$

Ainsi

$$V_{n+2} \geq V_{n+1}.$$

Ensuite, comme $V_{n+1} \leq 1200$,

$$V_{n+2} = 0,995V_{n+1} + 6 \leq 0,995 \times 1200 + 6 = 1194 + 6 = 1200.$$

Donc

$$V_{n+1} \leq V_{n+2} \leq 1200.$$

La propriété est héréditaire.

Par récurrence, pour tout entier naturel n ,

$$\boxed{V_n \leq V_{n+1} \leq 1200.}$$

4. Convergence et limite

D'après la question précédente, la suite (V_n) est croissante et majorée par 1200. Elle converge donc.

Notons ℓ sa limite. En passant à la limite dans la relation

$$V_{n+1} = 0,995V_n + 6,$$

on obtient

$$\ell = 0,995\ell + 6.$$

Donc

$$0,005\ell = 6 \iff \ell = \frac{6}{0,005} = 1200.$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 1200.}$$

Conseil de rédaction

La rédaction attendue est : « croissante et majorée, donc convergente ». Puis seulement ensuite on calcule la limite en passant à la limite dans la relation de récurrence.

2.2 Partie B - Modèle continu

On étudie l'équation différentielle

$$(E) : y' = -0,005y + 6.$$

1.a. Solutions de l'équation différentielle

On réécrit l'équation sous la forme

$$y' + 0,005y = 6.$$

Une solution particulière constante $y = L$ vérifie

$$0,005L = 6,$$

donc

$$L = 1200.$$

Les solutions sont donc

$$\boxed{y(t) = Ce^{-0,005t} + 1200, C \in \mathbb{R}.}$$

1.b. Expression de $v(t)$

On sait que $v(0) = 0$. Donc

$$v(0) = C + 1200 = 0,$$

ce qui donne

$$C = -1200.$$

Ainsi

$$v(t) = 1200 \left(1 - e^{-0,005t} \right).$$

1.c. Limite de v en $+\infty$

Comme

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,005t} = 0,$$

on obtient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 1200(1 - 0) = 1200.$$

Donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 1200.$$

1.d. Sens de variation de v

On dérive :

$$v'(t) = 1200 \times 0,005 e^{-0,005t} = 6e^{-0,005t}.$$

Or $e^{-0,005t} > 0$ pour tout $t \geq 0$. Donc

$$v'(t) > 0.$$

La fonction v est donc strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

$$v \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[.$$

2. Nettoyage complet ?

Le bassin contient 30000 litres d'eau. Un taux supérieur à 5% correspond à

$$0,05 \times 30000 = 1500 \text{ litres.}$$

Or, d'après la question précédente,

$$v(t) < 1200 \text{ pour tout } t \geq 0,$$

et $1200 < 1500$.

Selon ce modèle, le volume de substance polluante ne dépassera jamais 5% du volume du bassin. Le propriétaire n'a donc pas besoin de procéder à un nettoyage complet.

$$\text{Non, le seuil de 5\% n'est jamais atteint.}$$

3. Instant à partir duquel le volume dépasse 50 litres

On résout

$$1200(1 - e^{-0,005t}) > 50.$$

Cela équivaut à

$$1 - e^{-0,005t} > \frac{50}{1200} = \frac{1}{24},$$

donc

$$e^{-0,005t} < \frac{23}{24}.$$

En appliquant la fonction logarithme, strictement croissante :

$$-0,005t < \ln\left(\frac{23}{24}\right).$$

Comme on divise ensuite par un nombre négatif, le sens de l'inégalité change :

$$t > \frac{\ln\left(\frac{23}{24}\right)}{-0,005} = -200 \ln\left(\frac{23}{24}\right).$$

Donc le volume dépasse 50 litres au-delà de l'instant exact

$$t_0 = -200 \ln\left(\frac{23}{24}\right).$$

Numériquement,

$$t_0 \approx 8,512 \text{ h.}$$

Or 0,512 heure correspond à environ 31 minutes. Donc

$$t_0 \approx 8 \text{ h } 31 \text{ min.}$$

Point de vigilance

Lorsque l'on divise une inégalité par un nombre négatif, le sens de l'inégalité s'inverse. C'est une erreur classique dans ce type de question.

3 Exercice 3 - Probabilités et dénombrement

Affirmation 1

On sait que

$$P(O) = 0,52, \quad P_O(F) = 0,32, \quad P(F) = 0,20.$$

On cherche $P_F(O)$.

D'abord,

$$P(O \cap F) = P(O) \times P_O(F) = 0,52 \times 0,32 = 0,1664.$$

Donc

$$P_F(O) = \frac{P(O \cap F)}{P(F)} = \frac{0,1664}{0,20} = 0,832.$$

L'affirmation est donc vraie.

Affirmation 1 vraie.

Conseil de rédaction

Attention au sens de la probabilité conditionnelle : « parmi les personnes jouant de la Pop, 32% sont des femmes » signifie $P_O(F) = 0,32$, et non $P_F(O) = 0,32$.

Affirmation 2

On prélève 5000 personnes de manière indépendante, avec une probabilité $p = 0,062$ d'être musicien professionnel.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale :

$$X \sim \mathcal{B}(5000; 0,062).$$

Son espérance vaut

$$E(X) = np = 5000 \times 0,062 = 310.$$

L'affirmation annonce

$$P(X \leq 340) \approx 0,4.$$

Or 340 est supérieur à l'espérance 310 d'environ 30 unités. Il est donc déjà peu plausible que la probabilité d'être sous 340 soit seulement 0,4.

Avec la calculatrice, on obtient

$$P(X \leq 340) \approx 0,962.$$

Arrondi au dixième, cela donne

$$P(X \leq 340) \approx 1,0,$$

et certainement pas 0,4.

Affirmation 2 fausse.

Conseil de rédaction

Pour justifier proprement au bac, on écrit la loi suivie par X , puis on donne la commande ou le résultat calculatrice. Par exemple : $X \sim \mathcal{B}(5000; 0,062)$ et $P(X \leq 340) \approx 0,962$.

Affirmation 3

On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

Ici,

$$E(X) = 310.$$

De plus,

$$V(X) = np(1 - p) = 5000 \times 0,062 \times 0,938 = 290,78.$$

L'intervalle $]230; 390[$ est centré en 310 et correspond à

$$|X - 310| < 80.$$

Donc

$$P(230 < X < 390) = P(|X - 310| < 80).$$

Par Bienaymé-Tchebychev,

$$P(|X - 310| \geq 80) \leq \frac{290,78}{80^2}.$$

Donc

$$P(|X - 310| < 80) \geq 1 - \frac{290,78}{6400} \approx 0,9546.$$

On a donc bien une probabilité supérieure à 95%.

Affirmation 3 vraie.

Point de vigilance

Bienaymé-Tchebychev donne une borne minimale, pas une valeur exacte de probabilité. Ici, on ne calcule pas exactement $P(230 < X < 390)$: on montre seulement qu'elle est au moins égale à environ 0,9546.

Affirmation 4

Une équipe doit contenir 2 musiciens professionnels parmi 4 et 3 non-musiciens professionnels parmi 6.

Le nombre d'équipes possibles est donc

$$\binom{4}{2} \binom{6}{3} = 6 \times 20 = 120.$$

L'affirmation est donc vraie si l'on parle du nombre d'équipes possibles.

Affirmation 4 vraie.

Point de vigilance

Si l'on voulait compter les façons de constituer les deux équipes simultanément, sans distinguer l'équipe 1 et l'équipe 2, il faudrait diviser par 2 et on obtiendrait 60. Mais l'énoncé de l'affirmation parle bien d'équipes différentes : le résultat 120 est donc cohérent.

4 Exercice 4 - Fonction, primitives et modélisation

4.1 Partie A - Lecture graphique

1.a. Donner $f'(1)$

La courbe admet au point C d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses. Le coefficient directeur de cette tangente est donc nul.

Ainsi

$$f'(1) = 0.$$

1.b. Solution de $f(x) = 0$ sur $[0; 3]$

Graphiquement, la courbe coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Donc la solution de $f(x) = 0$ sur $[0; 3]$ est

$$x = \frac{1}{2}.$$

2. Déterminer $f'(\frac{1}{2})$

La tangente T_A à la courbe au point $A(\frac{1}{2}, 0)$ passe par $B(1, e^2)$.

Donc

$$f'(\frac{1}{2}) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{e^2 - 0}{1 - \frac{1}{2}} = 2e^2.$$

Ainsi

$$f'(\frac{1}{2}) = 2e^2.$$

Conseil de rédaction

Quand une tangente passe par deux points connus, sa pente se calcule avec la formule du coefficient directeur : $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

3. Choix des primitives

Une fonction F est une primitive de f lorsque $F' = f$.

Graphiquement, on lit que :

- $f(x) < 0$ sur $[0; \frac{1}{2}[$;
- $f(\frac{1}{2}) = 0$;
- $f(x) > 0$ sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$.

Donc une primitive de f doit être décroissante sur $[0; \frac{1}{2}]$, puis croissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$. Elle doit donc présenter un minimum en $x = \frac{1}{2}$.

Parmi les trois courbes proposées, les courbes C_1 et C_2 vérifient ce comportement. De plus, deux primitives d'une même fonction ne diffèrent que d'une constante : leurs courbes ont la même forme et sont des translations verticales l'une de l'autre.

Donc les deux courbes représentant des primitives de f sont

$$C_1 \text{ et } C_2.$$

Point de vigilance

Une primitive ne se repère pas à sa position au-dessus ou en dessous de l'axe. Il faut regarder son sens de variation, car $F' = f$.

4.2 Partie B - Étude de la fonction

On admet maintenant que

$$f(x) = (2x - 1)e^{-2x+3}.$$

1.a. Vérifier l'écriture demandée

On remarque que

$$-2x + 3 = -(2x - 1) + 2.$$

Donc

$$e^{-2x+3} = e^{2-(2x-1)} = e^2 e^{-(2x-1)} = \frac{e^2}{e^{2x-1}}.$$

Ainsi

$$f(x) = (2x - 1) \frac{e^2}{e^{2x-1}} = e^2 \times \frac{2x - 1}{e^{2x-1}}.$$

Donc

$$f(x) = e^2 \times \frac{2x - 1}{e^{2x-1}}.$$

1.b. Limite de f en $+\infty$

Posons

$$X = 2x - 1.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a $X \rightarrow +\infty$. De plus,

$$f(x) = e^2 \frac{X}{e^X}.$$

Or

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Conseil de rédaction

La limite classique à citer est : l'exponentielle l'emporte sur les puissances, donc $\frac{X}{e^X} \rightarrow 0$ lorsque $X \rightarrow +\infty$.

2.a. Dérivée de f

On pose

$$u(x) = 2x - 1, \quad w(x) = e^{-2x+3}.$$

Alors

$$u'(x) = 2, \quad w'(x) = -2e^{-2x+3}.$$

Par la formule de dérivation d'un produit,

$$f'(x) = u'(x)w(x) + u(x)w'(x).$$

Donc

$$f'(x) = 2e^{-2x+3} + (2x-1)(-2e^{-2x+3}).$$

On factorise :

$$f'(x) = [2 - 2(2x-1)]e^{-2x+3} = (2 - 4x + 2)e^{-2x+3}.$$

Ainsi

$$\boxed{f'(x) = (-4x + 4)e^{-2x+3}.}$$

2.b. Tableau de variations de f

Comme $e^{-2x+3} > 0$ pour tout $x \geq 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de

$$-4x + 4 = 4(1 - x).$$

Donc :

- $f'(x) > 0$ si $0 \leq x < 1$;
- $f'(1) = 0$;
- $f'(x) < 0$ si $x > 1$.

On calcule les valeurs importantes :

$$f(0) = (-1)e^3 = -e^3,$$

$$f(1) = (2-1)e^1 = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Donc f est croissante sur $[0; 1]$, puis décroissante sur $[1; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-e^3$	$\nearrow e$	$\searrow 0$

3. Détermination de α

Le logo est formé par la portion de courbe de f et son symétrique par rapport à l'axe des abscisses. À l'abscisse α , la distance verticale entre les deux courbes est donc

$$f(\alpha) - (-f(\alpha)) = 2f(\alpha).$$

La contrainte imposée est une épaisseur verticale de 0,3 cm, donc

$$2f(\alpha) = 0,3.$$

Ainsi

$$\boxed{f(\alpha) = 0,15.}$$

Sur l'intervalle $[1, +\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante. De plus,

$$f(1) = e > 0,15, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 < 0,15.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une solution à l'équation $f(x) = 0,15$ sur $[1, +\infty[$. Comme f est strictement décroissante sur cet intervalle, cette solution est unique.

À la calculatrice, on obtient

$$\alpha \approx 3,312.$$

Donc, arrondi au dixième,

$$\boxed{\alpha \approx 3,3.}$$

Conseil de rédaction

Pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution, il faut combiner : continuité, changement de signe ou encadrement de la valeur cherchée, et stricte monotonie.

4.3 Partie C - Aire et volume

1. Calcul de l'intégrale I

On considère

$$I = \int_{0,5}^{3,3} f(x) dx = \int_{0,5}^{3,3} (2x - 1)e^{-2x+3} dx.$$

On peut remarquer qu'une primitive de f est

$$F(x) = -xe^{-2x+3}.$$

En effet,

$$F'(x) = -e^{-2x+3} + 2xe^{-2x+3} = (2x - 1)e^{-2x+3} = f(x).$$

Cette primitive s'obtient aussi par intégration par parties.

Donc

$$I = \left[-xe^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3}.$$

Ainsi

$$I = -3,3e^{-6,6+3} - \left(-0,5e^{-1+3} \right).$$

Donc

$$I = 0,5e^2 - 3,3e^{-3,6}.$$

Numériquement,

$$I \approx 3,604.$$

Arrondi au dixième,

$$\boxed{I \approx 3,6.}$$

Conseil de rédaction

Même si l'énoncé demande une intégration par parties, il est utile de vérifier la primitive obtenue en la dérivant. Cela évite les erreurs de signe.

2. Volume du porte-clé

La surface du logo est formée par la courbe de f et son symétrique par rapport à l'axe des abscisses. L'aire du logo vaut donc

$$\mathcal{A} = 2I.$$

Avec $I \approx 3,6$, on obtient

$$\mathcal{A} \approx 7,2 \text{ cm}^2.$$

L'épaisseur de la plaque est de 0,2 cm. Donc le volume vaut

$$V = \mathcal{A} \times 0,2 \approx 7,2 \times 0,2 = 1,44.$$

Arrondi au dixième,

$$\boxed{V \approx 1,4 \text{ cm}^3.}$$

Point de vigilance

Il ne faut pas oublier le facteur 2 dans l'aire du logo : l'intégrale I ne mesure que l'aire sous la courbe supérieure. Le logo comprend aussi la partie symétrique en dessous de l'axe des abscisses.

5 Synthèse des réflexes de rédaction

- **Géométrie dans l'espace** : toujours citer le lien entre vecteur normal, orthogonalité et équation de plan.
- **Projeté orthogonal** : écrire que le projeté appartient à la fois au plan et à la droite orthogonale au plan.
- **Récurrence** : bien séparer initialisation, hérédité et conclusion.
- **Convergence d'une suite** : ne pas calculer une limite avant d'avoir justifié que la suite converge.
- **Probabilités conditionnelles** : bien identifier le conditionnement : $P_O(F)$ n'est pas $P_F(O)$.
- **Loi binomiale** : écrire les paramètres avant d'utiliser la calculatrice.
- **TVI et unicité** : existence par continuité et encadrement ; unicité par stricte monotonie.
- **Aires par intégrale** : toujours vérifier si l'aire totale nécessite un facteur 2 ou une différence entre deux courbes.